SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

MÃ SKKN

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

CÁC BÀI TOÁN VỀ GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Lĩnh vực/ Môn : TOÁN

Cấp học : TRUNG HỌC CƠ SỞ

Người thực hiện : Chức vụ : Giáo viên
Đơn vị :

NĂM HỌC 2016 - 2017

MỤC LỤC

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

1.1 Lý do chọn đề tài

Nghị quyết Đại hội đại biểu toàn quốc của Đảng lần thứ XI đã khẳng định "Đổi mới căn bản, toàn diện nền giáo dục Việt Nam theo hướng chuẩn hoá, hiện đại hoá, xã hội hóa , dân chủ hóa và hội nhập quốc tế... giáo dục và đào tạo có sứ mệnh nâng cao dân trí, phát triển nguồn nhân lực, bồi dưỡng nhân tài, góp phần quan trọng xây dựng đất nước, xây dựng nền văn hóa và con người Việt Nam..."

Để đạt được mục tiêu đó, ngoài việc thiết kế chương trình giáo dục phổ thông, đổi mới chương trình sách giáo khoa, đổi mới phương pháp dạy học, … thì việc giúp cho người học có được cơ hội học tập hết chương trình phổ thông, định hướng nghề nghiệp là một trong những việc làm rất quan trọng. Cấp học trung học cơ sở là một trong những cấp học quan trọng trong việc giúp học sinh có cơ hội học tập tiếp theo theo hướng học trung học phổ thông hoặc học nghề.

Từ năm học 2006 – 2007 đến nay, Sở GD&ĐT Hà Nội đã lựa chọn phương án thi vào lớp 10 theo hướng kết hợp thi tuyển với xét tuyển. Đối với phương án này thì kết quả bài thi môn Toán và Văn được nhân đôi, đóng vai trò quan trọng trong việc quyết định tổng điểm của học sinh. Chính vì vậy, giáo viên luôn trăn trở việc làm thế nào để luyện cho học sinh của mình đạt điểm cao trong bài thi vào lớp 10. Với vai trò là giáo viên dạy môn Toán ôn thi cho học sinh cuối cấp, tôi nhận thấy học sinh khá bỡ ngỡ trong bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol. Bài toán này không chỉ quan trọng trong cấp học trung học cơ sở mà còn rất quan trọng khi học sinh học toán cấp trung học phổ thông. Chính vì những lí do đó, tôi viết sáng kiến, kinh nghiệm ***"Các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol cấp trung học cơ sở"***.

1.2 Nhiệm vụ và mục đích của đề tài

Trước khi thực hiện đề tài, học sinh gặp nhiều khó găp ở những câu hỏi từ nhận biết, thông hiểu, vận dụng thấp, vận dụng cao.

Cụ thể, số liệu khảo sát trước khi thực hiện đề tài cho 45 học sinh lớp 9G, năm học 2015-2016.

	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao
Tỉ lệ làm đúng	70%	65%	60%	35%

Đề tài ***"Các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol cấp trung học cơ sở"*** với nhiệm vụ giúp học sinh nắm vững kiến thức, phát triển tư duy, kỹ năng giải quyết các dạng toán về giao điểm của đường thẳng và parabol cùng các câu hỏi liên quan. Từ đó, các em tự tin giải quyết các vấn đề liên quan khác.

Đề tài cũng là tài liệu giúp các em học sinh lớp 9 ôn thi vào lớp 10, định hướng tư duy về bài toán giao điểm của đường thẳng và đường cong cấp trung học phổ thông.

1.3 Phạm vi của đề tài

Đề tài được nghiên cứu và áp dụng với đối tượng là học sinh lớp 9. Đề tài là tài liệu tổng hợp, củng cố kiến thức, phát triển tư duy cho học sinh lớp 9.

2. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

2.1 Một số kiến thức cơ bản về phương trình bậc hai và các vấn đề liên quan

2.2.1 Công thức nghiệm phương trình bậc hai:

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

Công thức nghiệm	Công thức nghiệm thu gọn
$\Delta=b^2-4ac$	Nếu b=2b' ta có $\Delta'=b'^2-ac$
+) Nếu Δ>0, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	+) Nếu Δ'>0, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$
+) Nếu Δ=0, phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$	+) Nếu Δ'=0, phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$
+) Nếu Δ<0, phương trình vô nghiệm.	+) Nếu Δ'<0, phương trình vô nghiệm.

2.1.2 Hệ thức Vi-et : Phương trình $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1 ; x_2

Ta có hệ thức Vi-ét : $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

2.1.3 Một số bài toán về dấu của nghiệm phương trình bậc hai :

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

$\Delta=b^2-4ac$; $\quad S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$; $\quad P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$

+) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu ⇔ a.c<0

+) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu ⇔ $\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \end{cases}$

+) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt ⇔ $\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

+) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

2.1.4 Qui trình chung để giải bài toán liên quan đến mối quan hệ giữa hai nghiệm của phương trình bậc hai :

+) Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (hai nghiệm phân biệt)

+) Biến đổi biểu thức của đề bài về biểu thức mới chứa $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$

+) Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình đã cho rồi thay thế vào biểu thức nói trên.

+) Giải phương trình (bất phương trình) chứa tham số vừa tìm được.

+) Chọn kết quả và trả lời.

Chú ý : $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1.x_2$; $\left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1.x_2$

2.1.5 Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số

Cho (P) : $y = ax^2$ $(d); y = mx + n$

Để giải quyết các bài toán về số giao điểm của (P) và (d) ta thường thực hiện theo các bước sau :

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 \quad (*)$$

- Số nghiệm phương trình (*) chính là số giao điểm của (P) và (d) :

(*) có 2 nghiệm phân biệt ⇔ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

(*) có nghiệm kép ⇔ (d) tiếp xúc với (P).

(*) vô nghiệm ⇔ (d) và (P) không có điểm chung.

- Mối quan hệ giữa hoành độ giao điểm chính là mối quan hệ giữa 2 nghiệm của phương trình (*).

3. Các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol

3.1 Dạng 1: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng và parabol.

Ví dụ 1: *Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d):*

a) (P): $y = x^2$ và (d): $y=-x+2$

b) (P): $y = -x^2$ và (d): $y=4x+4$

Giải:

a) (P): $y = x^2$ và (d): $y=-x+2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2=-x+2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2=0$

Giải phương trình ta có x=1; x = -2

$x=1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1;1)$; $x=-2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(-2;4)$

Vậy d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A(1;1); B(-2;4)

b) (P): $y = -x^2$ và (d): y=4x+4

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$-x^2=4x+4 \Leftrightarrow x^2 + 4x +4=0$

Giải phương trình ta có nghiệm kép $x_1=x_2=-2$

$x=-2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow M(-2;-4)$

Vậy d tiếp xúc với (P). Tiếp điểm là M(-2;-4)

Ví dụ 2:(Trích trong Đề thi vào môn Toán vào lớp 10 Hà Nội, năm học 2014-2015)

Cho d: y = - x + 6 và (P): $y=x^2$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

b) Gọi giao điểm là A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

Giải:

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

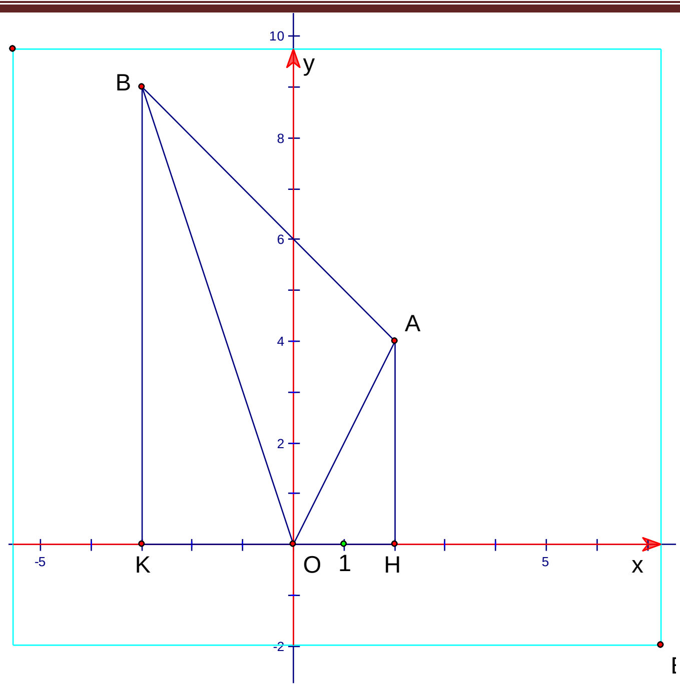
Với x = 2 , y = 4

Với x= -3, y = 9

Ta có tọa độ giao điểm của d và (P) là A(2;4); B(-3;9)

b) Tính diện tích tam giác OAB:

Kẻ AH và BK vuông góc với Ox.



Ta có $S_{AOB}=S_{ABKH}-S_{OAH}-S_{OBK}$=[(4+9).5]:2-(2.4):2-(3.9):2=15 (đvdt)

3.2 Dạng 2: Số giao điểm của đường thẳng và parabol

Ví dụ 1: *Cho (P): $y = -x^2$ và (d): $y = x + m - 3$*
a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
b) Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$-x^2=x+m-3 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 3=0$ (*)

a) (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta >0 \Leftrightarrow 1 - 4(m-3)>0 \Leftrightarrow m<13/4$

b) (d) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta =0 \Leftrightarrow 1 - 4(m-3)=0 \Leftrightarrow m=13/4$

(*) có nghiệm kép là $x_1=x_2= -1/2 \Rightarrow y = -1/4$

Tiếp điểm là M(-1/2;-1/4)

Ví dụ 2: *Cho (P) $y = -x^2$ và (d): $y = 2(m-1)x - (m+4)$*
Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$-x^2=2(m-1)x - (m+4) \Leftrightarrow x^2 +2(m-1)x - (m+4)=0$ (*)

$$\Delta=(m-1)^2+m+4=m^2-m+5=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 3: *Cho (P) $y = x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) biết:*
a) Tiếp tuyến song song với (d) $y = x - 5$
b) Tiếp tuyến đi qua A(1;-3)

Giải

a) Gọi (d') y = x + m ($m\neq-5$) song song với (d) y = x-5 .

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P):

$x^2=x+m \Leftrightarrow x^2-x-m=0$ (*)

(d') tiếp xúc với (P) (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 1+4m=0 \Leftrightarrow m=-1/4$ (tmđk)

Vậy (d')" y = x -1/4

b) Gọi (d") y = ax + b là tiếp tuyến của (P).

+) A(1;-3) $\in$ (d") $\Leftrightarrow$ a+ b = -3 $\Leftrightarrow$ b = -3-a $\Rightarrow$ (d"): y = ax - 3 - a.

+) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d") và (P):

$x^2=ax-3-a \Leftrightarrow x^2-ax+a+3=0$ (*)

(d') tiếp xúc với (P) (*) có nghiệm kép

$\Delta=0 \Leftrightarrow a^2-4a-12=0$

Giải pt ta được a = 6; a = -2

Vậy qua A(1;-3) có hai tiếp tuyến với (P) là (d") y = 6x-9; (d'"): y = -2x-1

3.3 Dạng 3: Đường thẳng cắt parabol thỏa mãn các điều kiện về tọa độ giao điểm; vị trí giao điểm

Ví dụ 1. ***(Trích trong Đề thi vào môn Toán vào lớp 10 Hà Nội, năm học 2011-2012)***
Cho (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x- m^2+9$
1) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) khi m = 1
2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung.

Giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2=2x-m^2+9 \Leftrightarrow x^2-2x+m^2-9=0$ (1)

1) Với m = 1, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P)

Phương trình (1): $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta' = 9$

Phương trình có hai nghiệm $x_1=-2 \Rightarrow y_1 = (-2)^2 = 4 \Rightarrow A(-2;4)$

$x_2=4 \Rightarrow y_1 = 4^2 = 16 \Rightarrow B(4;16)$

2) (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow 1.(m^2-9)<0 \Leftrightarrow -3<m<3$

Ví dụ 2. *Cho (P):* $y = x^2$ *và d:* $y = 2(m+1)x - 2m - 1$

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = \frac{1}{2}$ *(0,75 điểm)*

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung và cách đều trục tung (0,5 điểm).

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$ (*)

a) Khi $m = \frac{1}{2}$, ta có phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Giải phương trình tìm được $x_1=1$; $x_2=2$

Tìm được giao điểm A(1;1); B(2;4)

b) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1<0 \\ 2(m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1}{2} \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

***Ví dụ 3.* (Trích trong Đề thi vào môn Toán vào lớp 10 Hà Nội, năm học 2014-2015)**

Cho Parabol (P): $y = -x^2$ *và đường thẳng (d) y = mx - 1*

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi x_1 *và* x_2 *lần lượt là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P). Tìm giá trị của m để* $x_1^2.x_2 + x_2^2.x_1 - x_1.x_2 = 3$

Giải.

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Toạ độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = mx - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = mx - 1 \\ y = -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 1 = 0 \quad (*) \\ y = -x^2 \end{cases}$$

Xét phương trình (*): $x^2 + mx - 1 = 0 \quad (*)$

Ta có $\Delta = m^2 + 4$

$m^2 \geq 0 \quad \forall m \Leftrightarrow m^2 + 4 \geq 4 > 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \Delta > 0 \quad \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

2) Gọi x_1 và x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P). Tìm giá trị của m để $x_1^2.x_2 + x_2^2.x_1 - x_1.x_2 = 3$

Vì (*) luôn có hai nghiệm phân biệt nên áp dụng hệ thức Vi-et cho (*) ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = -1 \end{cases} \qquad (**)$$

$x_1^2.x_2 + x_2^2.x_1 - x_1.x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1.x_2\left(x_1 + x_2\right) - x_1.x_2 = 3 \quad (***)$

Thay (**) vào (***) ta có: $-1.(-m) - (-1) = 3 \Leftrightarrow m = 2$

Ví dụ 4. (Trích trong Đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2016-2017)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y=3x + m^2 - 1$ và parabol (P): $y= x^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1; x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để

$(x_1 + 1).(x_2 + 1) = 1$

Giải

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = 3x + m^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0(*)$

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-m^2 + 1) = 4m^2 + 5$

$m^2 \geq 0 \quad \forall m \Rightarrow 4m^2 + 5 > 0 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \quad \forall m$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

⇔ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1; x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để

$(x_1+1).(x_2+1)=1$

Ta có $(x_1+1).(x_2+1)=1 \Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_2)=0(**)$

Áp dụng hệ thức Vi-et cho (*): $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=-m^2+1 \end{cases}$

$(**) \Leftrightarrow -m^2+1+3=0 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=\pm 2$

Ví dụ 5. *Cho (P):* $y=x^2$ *và d:* $y=2mx-2m+1$

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi m = 2.

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $H(x_1;y_1);K(x_2;y_2)$ *sao cho* $y_1+y_2=10$

Giải.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi m = 2.

Khi m = 2, ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$x^2-4x+3=0$

Gpt ta được: $x_1=1 \Rightarrow y_1=1 \Rightarrow A(1;1)$

$x_2=3 \Rightarrow y_2=9 \Rightarrow B(3;9)$

b) Xét pt hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2-2mx+2m-1=0$ (*)

*) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt ⇔ (*) có 2 nghiệm pb⇔$m\neq 1$

*) $y_1+y_2=10 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=10 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1.x_2-10=0$ (**)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho pt (*) ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=2m-1 \end{cases}$

$(**) \Leftrightarrow 4m^2-4m-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$(tmdk)

Ví dụ 6. *Cho Parabol (P):* $y=x^2$ *và đường thẳng d:* $y=2(m-3)x-m^2+7$.

a) Khi m=2. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d) *b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt C($x_1;y_1$); D($x_2;y_2$) thỏa mãn: $y_1 + y_2 = x_1.x_2 + 57$*

Giải

a) Khi m=2. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = 2(m-3)x - m^2 + 7 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-3)x + m^2 - 7 = 0(*)$

Khi m=2 pt (*) $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Giải được nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -3$.

Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P) là: A(1;1) B(-3;9)

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt C($x_1;y_1$); D($x_2;y_2$) thỏa mãn: $y_1 + y_2 = x_1.x_2 + 57$

+) (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{8}{3}$

+) $y_1 + y_2 = x_1.x_2 + 57 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = x_1.x_2 + 57 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 57$ (**)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho pt (*) ta có $x_1+x_2=2(m-3)$; $x_1.x_2=m^2-7$

$(**) \Leftrightarrow 4(m-3)^2 - 3(m^2-7) = 57 \Leftrightarrow m^2 - 24m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0(tmdk) \\ m = 24(loai) \end{array}\right.$

Vậy m = 0

***Ví dụ 7**. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m+1)x - 2m$.*

a) Khi m=1. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d)

b) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt P($x_1;y_1$); Q($x_2;y_2$) sao cho $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ nhỏ nhất

Giải.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = (2m+1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0(*)$

(*) $\Leftrightarrow$ $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

Khi m=1 pt $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

Giải được nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2$.

Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P) là: A(1;1) B(2;4)

b) +) (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt

⇔ Δ >0 ⇔ m≠ 0,5

+) Ta có $\begin{array}{l} T = y_1 + y_2 - x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ T = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \end{array}$

Áp dụng hệ thức Viet cho (*)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}$$

$$T = (2m+1)^2 - 3.2m$$

$$T = 4m^2 - 2m + 1 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Lập luận dẫn đến T_{min}= ¾ khi m = ¼.

<u>Ví dụ 8. (Trích trong Đề thi môn Toán vào lớp 10 Hà Nội, năm học 2013-2014)</u>

Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ *và d:* $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$

a) Với m = 1 xác định tọa độ giao điểm A, B của d và (P)

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1; x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$

<u>Giải</u>

a) Với m = 1 ta có d: $y = x + \frac{3}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (1)$$

Giải pt (1) ta có x=-1; x= 3. Từ đó tìm được $A\left(-1; \frac{1}{2}\right); B\left(3; \frac{9}{2}\right)$

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1; x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$

Xét: $x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0$ (*)

*) d cắt (P) tại hai điểm pt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$

*) $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$ (**)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho (*) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 2m - 2 \end{cases}$

(**) $(2m)^2-4(m^2-2m-2)=4\Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}$ (tmđk)

Vậy $m=\frac{-1}{2}$

Ví dụ 9. *Cho* $(P): y=-x^2;(\text{d}): y=-2(m+1)x+2m+1$. *Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ giao điểm đều lớn hơn -1*

Giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P):

$$x^2-2(m+1)x+2m+1=0\ (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ giao điểm đều lớn hơn -1 $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt đều lớn hơn -1

+) Pt có 2 nghiệm pb $\Leftrightarrow\ \Delta'>0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0$

+) Vì a + b + c = 0, nên theo hệ thức Vi-et, pt đã cho có 2 nghiệm pb:

$\mathrm{x}_1=1;\mathrm{x}_2=2\mathrm{m}+1$

Để 2 nghiệm của pt đều lớn hơn -1 $\Leftrightarrow 2m+1>-1\Leftrightarrow m>-1$

Kết hợp điều kiện: $\begin{cases}\mathrm{m}>-1\\ \mathrm{m}\neq 0\end{cases}$

Ví dụ 10. *Cho Parabol (P):* $y=x^2$ *và đường thẳng (d):* $y=(2m+1)x-2m$.

a) Khi m=1. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d)

b) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt trong đó có một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Giải

a) Xét pt hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2-(2m+1)x+2m=0$

Khi m=1 pt $\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

Giải được nghiệm $x_1=1;x_2=2$.

Vậy toạ độ giao điểm của (d) và (P) là: A(1;1) B(2;4)

b) +) (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ \Delta>0\Leftrightarrow$ m$\neq$ 0,5

Từ (*) chỉ ra được hai nghiệm của pt là: x= 1 và x = 2m

+) Để để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt trong đó có một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt và có một nghiệm nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow$ x = 2m <1 $\Leftrightarrow$ $m < \frac{1}{2}$

Vậy $m < \frac{1}{2}$

Ví dụ 11. *Cho parabol (P) :* $y = x^2$ *và đường thẳng d:* $y = 2(m-1)x + 3 - 2m$ *.*
Tìm m để d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{10}$ *.*

Giải: Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$ (1)

+)Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (1) phải có 2 nghiệm dương phân biệt và :

$x_1;\ x_2$ *và* $x_1^2 + x_2^2 = 10$

PT(1) có nghiệm : $x_1 = 1;\ x_2 = 2m - 3 \Rightarrow \begin{cases} 2m - 3 > 0 \\ 2m - 3 \neq 1 \\ 1 + (2m-3)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow 2m - 3 = 3 \Rightarrow m = 3$

Ví dụ 12. (Trích trong Đề thi môn Toán vào lớp 10 – Hà Nội năm học 2015-2016).

Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$ *(x là ẩn số) (1)*

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Giải.

a) C*hứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.*

Ta có $\begin{aligned} &\Delta = \left[-(m+5)\right]^2 - 4.1.(3m+6) = m^2 + 10m + 25 - 12m - 24 \\ &\Delta = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0 \forall m \end{aligned}$

Nên phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

*) Phương trình (1) có hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông ⇔ (1) có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \ge 0 \\ 3m+6>0 \\ m+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

*) Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 \quad (2)$$

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+5 \\ x_1.x_2 = 3m+6 \end{cases}$

Thay vào (2) ta có:

$$(m+5)^2 - 2(3m+6) = 25 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$$

Giải phương trình ta có m = 2 (tmđk); m = -6 (loại).

Vậy m = 2

Ví dụ 13. *Cho Parabol (P) y = x^2 và đường thẳng (d) y=2x-m+3*

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1; x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 5$

b) Gọi A và B là hai điểm thuộc (P). Biết hoành độ của A và B lần lượt là -2 và 3. Tìm toạ độ điểm M trên cung AB của (P) để ΔMAB có diện tích lớn nhất.

Giải:

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1; x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 5$

*) Lập luận để có được pt hoành độ giao điểm $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (1)

*)(d) cắt (P) tại 2 điểm pb ⇔ Pt (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$

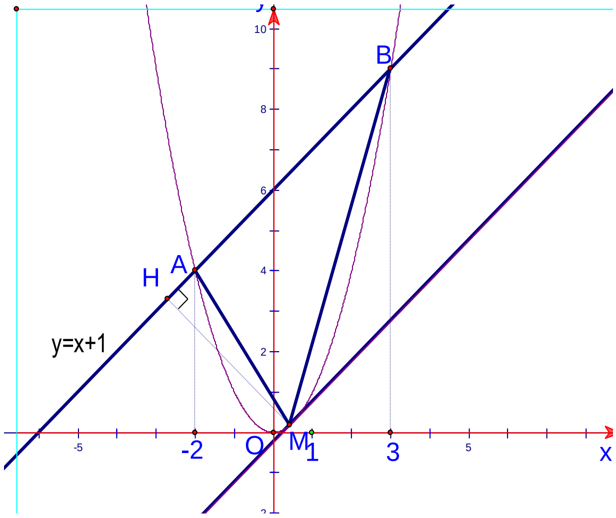
*) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 5 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 = 3x_1x_2 + 5 \quad (2)$

áp dụng hệ thức Vi-ét cho pt (1) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_1 = 2 \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow 2^2 = 3(m-3) + 5 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3} (tmdk)$$

Vậy $m = \frac{8}{3}$

b) Gọi A và B là hai điểm thuộc (P). Biết hoành độ của A và B lần lượt là -2 và 3. Tìm toạ độ điểm M trên cung AB của (P) để ΔMAB có diện tích lớn nhất.



Tìm được toạ độ A(-2;4) và B(3;9)

Phương trình đường thẳng AB: y = x + 6.Lấy M thuộc cung AB

Vì AB cố định nên diện tích MAB max

⇔ M là tiếp điểm của đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với (P);Gọi (d') // (AB) có pt: y = x + n

(d') và (P) tiếp xúc nhau ⇔ pt $x^2 - x - n = 0$ có nghiệm kép ⇔ $n = -\frac{1}{4}$

Pt trên có nghiệm kép $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$.Vậy $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

Ví dụ 14. *Cho Parabol (P) y = x^2 và đường thẳng (d) y=(m+2)x-(2m-1)*

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Hãy tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ hai giao điểm của (d) và (P) không phụ thuộc m.

Giải.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 - (m+2)x + (2m-1) = 0$ (*)

$\Delta = (m+2)^2 - 4(2m-1) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0$

Do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

b) Hãy tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ hai giao điểm của (d) và (P) không phụ thuộc m

Áp dụng hệ thức Vi- et cho (*) ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1.x_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_1 + x_2 - 2 (1) \\ m = \dfrac{x_1 x_2 + 1}{2} (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1 + x_2 - 2 = \frac{x_1 x_2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2\left(x_1 + x_2\right) - x_1 x_2 - 5 = 0$$

Hệ thức cần tìm là: $2\left(x_1 + x_2\right) - x_1 x_2 - 5 = 0$

Ví dụ 15. *Cho Parabol (P)* $y = x^2$ *và đường thẳng (d) y=mx-m+1*

Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1*;* x_2 *thỏa mãn:*

a) $|x_1| + |x_2| = 4$

b) $x_1 - 9x_2 = 0$

Giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (*)

+) Đk để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt: $m \neq 2$

+) $|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow \left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 16$
$\Leftrightarrow m^2 - 2(m-1) + 2|m-1| = 16$

*)Với m≥1: m=4 (tmđk); m = -4 (loại)

*) Với m<1: m=-2 (tmđk); m=6 (loại)

b) Đk để pt có hai nghiệm phân biệt: $m \neq 2$

Ta có $\begin{cases} x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9m}{10} \\ x_2 = \dfrac{m}{10} \\ \dfrac{9m}{10}.\dfrac{m}{10} = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 10; m = \dfrac{10}{9}$

Ví dụ 16. *Cho Parabol (P)* $y = \dfrac{x^2}{2}$ *và đường thẳng d đi qua I(0;2) có hệ số góc k.*

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A; B.

b) Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của A và B trên Ox. Chứng minh tam giác IHK vuông tại I.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A; B.

Gọi đường thẳng d có hệ số góc k là (d): y = kx+b

Vì (d) đi qua I(0;2) nên ta có 2=k.0+b nên b=2.

(d): y = kx+2

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\frac{x^2}{2} = kx + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2kx - 4 = 0\,(*)$$

Vì a.c=-4<0 nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k.

b) $x_1.\mathrm{x}_2 = -4 \Rightarrow |x_1|.|x_2| = 4 \Leftrightarrow OH.OK = OI^2$

Suy ra tam giác OHI đồng dạng với tam giác OIK. Suy ra góc IHO=góc OIK nên tam giác IHK vuông tại I

Ví dụ 17. *Cho Parabol (P)* $y = x^2$ *và d: y= mx+1*

a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A; B.

b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 3

Hướng dẫn giải:

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 - mx - 1 = 0$ (*)

a) Vì a.c=-1 nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Hai nghiệm của phương trình trái dấu; Giả sử $x_1 < 0 < x_2$

Gọi I là giao điểm của d và trục Oy. Vì hai nghiệm trái dấu nên I thuộc đoạn AB.

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OIB} = \frac{|x_A|.OI}{2} + \frac{|x_B|.OI}{2} = \frac{|x_A|.1}{2} + \frac{|x_B|.1}{2} = \frac{-x_A + x_B}{2}$$

$$\left(x_B - x_A\right)^2 = \left(x_B + x_A\right)^2 - 4x_B x_A = m^2 + 4 \Rightarrow x_B - x_A = \sqrt{m^2 + 4}$$

S=3 , giải phương trình ta được $m = \pm\sqrt{32}$

4. Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm tọa độ giao điểm và vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ:

a) y = -x + 3 và $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = 2x^2$ và y = -x + 1 c) $y = x^2$ và y = -x -5

Bài 2. Cho (P) $y = x^2$ và (d) y = 2x + m - 3. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thỏa mãn:

a) Nằm về hai phía Oy.

b) Cùng nằm về bên phải trục tung

c) Có hoành độ giao điểm thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Bài 3. Cho (P): $y = x^2$ và d: $y = 2(m+1)x - 2m - 1$

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = \frac{1}{2}$

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung và cách đều trục tung.

Bài 4. Cho hàm số: $y = x^2$ (P) và đường thẳng d: $y = 2\left(m+4\right)x - m^2 + 8$

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = -1$

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$ thỏa mãn:

$$y_1 + y_2 = x_1.x_2 + 121$$

Bài 5. Cho (P) $y = x^2$ và (d) y = 2(m-2)x -m^2 + 8. Tìm m để:

a) (P) và (d) tiếp xúc nhau.

b) (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt mà hoành độ của hai giao điểm là hai số đối nhau.

c) (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt mà tổng hai hoành độ giao điểm bằng -6.

d) (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

e) Trong trường hợp (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt, hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa hoành độ hai giao điểm.

Bài 6. Cho (P) $y = x^2$ và (d) y = 3x - 2

a) Tìm giao điểm của (d) và (P). Vẽ đồ thị hai hàm số trong trường hợp này.

b) Gọi giao điểm của (d) và (P) lần lượt là A, B với A là điểm có hoành độ nhỏ hơn.Tính diện tích tam giác OAB

Bài 7. Cho parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2(m-1)x-m^2+7$

Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A(x_1;y_1) và B(x_2; y_2) thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 4$

Bài 8. Cho (P) $y = x^2$ và (d) $y = 2mx - m^2 + 1$

a) Tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P) khi m = 2 .

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ giao điểm đều lớn hơn 1.

Bài 9. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm 2010) Cho Parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d) y = mx - 1

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi x_1 và x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P). Tìm giá trị của m để $x_1^2.x_2 + x_2^2.x_1 - x_1.x_2 = 3$

Bài 10. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2011-2012)

Cho (P) y = x^2 và đường thẳng (d): y = 2x – m^2 + 9

1) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung.

Bài 11. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2012-2013)

Cho phương trình $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$ (ẩn x). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 7$

Bài 12. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2013-2014)

Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và d: $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$

a) Với m = 1 xác định tọa độ giao điểm A, B của d và (P)

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1; x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$

Bài 13. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2014-2015) Cho d: y = - x + 6 và (P): y=x^2.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

b) Gọi giao điểm là A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 14. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2015-2016)

Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m/

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Bài 15. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội năm học 2016-2017)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y=3x + m^2 - 1$ và parabol (P): $y= x^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1; x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để

$(x_1+1).(x_2+1)=1$

KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

- Đề tài ***“Các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol cấp trung học cơ sở”*** đã được tác giả sử dụng trong giảng dạy, ôn thi vào lớp 10 cho học sinh lớp 9 trong các năm học 2013-2014; 2014-2015; 2015-2016; 2016-2017. Sau khi áp dụng đề tài, học sinh hiểu vấn đề, giải quyết được các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol. Đặc biệt, đề tài giúp học sinh thể hiện được năng lực của mình qua các dạng toán từ dễ đến khó. Học sinh trung bình có thể giải quyết tốt các bài toán ở dạng 1. Học sinh khá giỏi, hào hứng và giải quyết tốt các bài toán dạng 2 và dạng 3.

Số liệu khảo sát sau khi thực hiện đề tài cho 45 học sinh lớp 9G, năm học 2015-2016.

	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao
Tỉ lệ làm đúng	97%	90%	88%	80%

- Tác giả mong muốn đề tài ***“Các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol cấp trung học cơ sở”*** là tài liệu tự học cho học sinh và tài liệu giúp cha mẹ học sinh tự ôn tập cho con em mình.

- Tác giả mong muốn đề tài là tài liệu tham khảo hữu ích giúp các bạn đồng nghiệp trong quá trình giảng dạy và ôn tập cho học sinh thi vào lớp 10.

- Chắc chắn rằng đề tài ***“Các bài toán về giao điểm của đường thẳng và parabol cấp trung học cơ sở”*** không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong sự đóng góp của quí vị và các bạn.

Trân trọng cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 9 – Bùi Văn Tuyên – Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam – 2012
2. Nâng cao và phát triển Toán 9 tập 2 – Vũ Hữu Bình – Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam - 2012
3. Sách giáo khoa Toán 9 tập 2 - Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam – 2006
4. Sách bài tập Toán 9 tập 2 - Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam – 2006
5. Tài liệu ôn thi vào lớp 10 môn Toán – Nguyễn Ngọc Đạm, Đoàn Văn Tề, Tạ Hữu Phơ – Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam – 2011