PHĐNG GD&□T QUẤN □□NG □A

TR□□NG THCS TH□I TH□NH

-------*****-------

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI TRONG GIẢI TOÁN THCS

MÔN TOÁN

Tên tác giả: Nguyễn Cao Cường

Giáo viên môn Toán

Năm học 2013 - 2014

MỤC LỤC

A – MỞ ĐẦU

Trang

B – NỘI DUNG

MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Toán học nói chung và toán học phổ thông nói riêng đã giúp người học, người nghiên cứu nó có được kiến thức, tư duy logic và khả năng suy luận. Đối với những học sinh trung học cơ sở, toán học đã hình thành cho các em những kiến thức cơ sở ban đầu, những kiến thức cơ bản nhất của toán học hiện đại. Qua những bài học, những vấn đề toán cùng với những cách thức suy luận đã giúp các em hình thành tư duy toán học.

Toán học sơ cấp có lẽ là mảng toán học đòi hỏi trí thông minh, óc tư duy linh hoạt của người học, trong đó bất đẳng thức là vấn đề hay và khó. Từ các lớp trung học cơ sở, học sinh được giới thiệu một cách cơ bản nhất về bất đẳng thức, phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Và hầu hết những người đã học bất đẳng thức, ai cũng biết về một bất đẳng thức kinh điển, nổi tiếng: bất đẳng thức Cô-si. Nhưng một thực tế chung đối với học sinh phổ thông là việc vận dụng bất đẳng thức Cô - si vào giải toán gặp rất nhiều khó khăn. Khó khăn đầu tiên là không biết cách sử dụng bất đẳng thức Cô - si. Khó khăn thứ hai là không biết bất đẳng thức Cô - si có thể ứng dụng vào việc giải những dạng toán nào? Chính vì vậy, để giúp các em học sinh có thể khắc phục phần nào những khó khăn trên, tôi viết đề tài " ***Sử dụng bất đẳng thức Cô - si trong giải toán trung học cơ sở"***

II. Nhiệm vụ, mục đích của đề tài

Đề tài " ***Sử dụng bất đẳng thức Cô - si trong giải toán THCS"*** sẽ giới thiệu đến với học sinh về bất đẳng thức Cô - si; những kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô-si và việc sử dụng bất đẳng thức Cô-si trong giải toán THCS.

Đề tài được viết theo cách thức lý thuyết đi kèm với ví dụ minh họa. Bên cạnh việc cung cấp, tổng kết những cách sử dụng bất đẳng thức Cô - si, đề tài còn giới thiệu những bài toán minh họa, đặc biệt là những bài toán học sinh thường gặp về bất đẳng thức, cực trị đại số, cực trị hình học.

III. Phạm vi của đề tài

Với học sinh trung học cơ sở, lớp 8 các em mới được giới thiệu và tiếp cận với bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức Cô -si nói riêng. Vì vậy, đề tài " ***Sử dụng bất đẳng thức Cô - si trong giải toán THCS"*** hướng tới việc giúp cho học sinh lớp 8; lớp 9 có được những kiến thức về bất đẳng thức Cô-si; cách sử dụng bất đẳng thức Cô - si trong giải toán trung học cơ sở, từ đó giúp cho các em phát triển tư duy về bất đẳng thức, đặt nền móng cho các cấp độ lớn hơn sau này.

IV. Đối tượng nghiên cứu và phương pháp tiến hành

Đề tài tập trung nghiên cứu về bất đẳng thức Cô-si. Trên cơ sở những kiến thức cơ bản về dạng bất đẳng thức, tổng kết một kỹ thuật thường dùng; giới thiệu một số ứng dụng của bất đẳng thức Cô - si trong giải toán trung học cơ sở.

Phương pháp chủ yếu của đề tài là phương pháp nghiên cứu và tổng kết kinh nghiệm trong thực tế giảng dạy.

1. NHỮNG QUY TẮC CHUNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

Quy tắc song hành: hầu hết các BĐT đều có tính đối xứng do đó việc sử dụng các chứng minh một cách song hành, tuần tự sẽ giúp ta hình dung ra được kết quả nhanh chóng và định hướng cách giả nhanh hơn.

Quy tắc dấu bằng: dấu bằng “ = ” trong BĐT là rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh. Nó định hướng cho ta phương pháp giải, dựa vào điểm rơi của BĐT. Chính vì vậy mà khi dạy cho học sinh ta rèn luyện cho học sinh có thói quen tìm điều kiện xảy ra dấu bằng mặc dù trong các kì thi học sinh có thể không trình bày phần này. Ta thấy được ưu điểm của dấu bằng đặc biệt trong phương pháp điểm rơi và phương pháp tách nghịch đảo trong kỹ thuật sử dụng BĐT Cô Si.

Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng: không chỉ học sinh mà ngay cả một số giáo viên khi mới nghiên cứu và chứng minh BĐT cũng thương rất hay mắc sai lầm này. Áp dụng liên tiếp hoặc song hành các BĐT nhưng không chú ý đến điểm rơi của dấu bằng. Một nguyên tắc khi áp dụng song hành các BĐT là điểm rơi phải được đồng thời xảy ra, nghĩa là các dấu “ = ” phải được cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.

Quy tắc biên: Cơ sở của quy tắc biên này là các bài toán quy hoạch tuyến tính, các bài toán tối ưu, các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên một miền đóng. Ta biết rằng các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thường xảy ra ở các vị trí biên và các đỉnh nằm trên biên.

Quy tắc đối xứng: các BĐT thường có tính đối xứng vậy thì vai trò của các biến trong BĐT là như nhau do đó dấu “ = ” thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có gắn hệ điều kiện đối xứng thì ta có thể chỉ ra dấu “ = ” xảy ra khi các biến bằng nhau và mang một giá trị cụ thể.

Chiều của BĐT : “ $\geq$ ”, “ $\leq$ ” cũng sẽ giúp ta định hướng được cách chứng minh: đánh giá từ TBC sang TBN và ngược lại

Trên là 5 quy tắc sẽ giúp ta có định hướng để chứng minh BĐT, học sinh sẽ thực sự hiểu được các quy tắc trên qua các ví dụ và bình luận ở phần sau.

2. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ - SI

(CAUCHY)

1. Dạng tổng quát (n số): $\forall x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n \geq 0$ ta có:

- Dạng 1: $\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 2: $x_1+x_2+\ldots\ldots x_n \geq n\sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 3: $\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots x_n}{n}\right)^n \geq x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots = x_n$

Hệ quả 1:

Nếu: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = S = const$ **thì:** $Max\left(\mathrm{P} = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_n\right) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$

khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots = x_n = \dfrac{S}{n}$

Hệ quả 2:

Nếu: $x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n = P = const$ **thì:** $Min\left(S = x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_2\right) = n\sqrt[n]{P}$

khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$

2. Dạng cụ thể (2 số, 3 số):

	n = 2: $\forall$ x, y ≥ 0 khi đó:	n = 3: $\forall$ x, y, z ≥ 0 khi đó:
2.1	$\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
2.2	$x+y \geq 2\sqrt{xy}$	$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$
2.3	$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$	$\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$
2.4	$(x+y)^2 \geq 4xy$	$(x+y+z)^3 \geq 27xyz$
2.5	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$

2.6	$\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$	$\frac{1}{xyz} \geq \frac{4}{(x+y+z)^3}$

Bình luận:

- Để học sinh dễ nhớ, ta nói: Trung bình cộng (TBC) ≥ Trung bình nhân (TBN).
- Dạng 2 và dạng 3 khi đặt cạnh nhau có vẻ tầm thường nhưng lại giúp ta nhận dạng khi sử dụng BĐT Cô Si: (3) đánh giá từ TBN sang TBC khi không có cả căn thức.

3. CÁC KỸ THUẬT SỬ DỤNG BĐT CÔ - SI

3.1 Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Đánh giá từ TBC sang TBN là đánh giá BĐT theo chiều " $\geq$ ". Đánh giá từ tổng sang tích.

Bài 1: Chứng minh rằng: $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp:

Sử dụng: $\forall$ x, y thì $x^2 - 2xy + y^2 = (x- y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$. Do đó:

$$\begin{cases} a^2+b^2\geq 2ab \\ b^2+c^2\geq 2bc \\ c^2+a^2\geq 2ca \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c \quad \text{(Sai)}$$

Ví dụ: $\begin{cases} 2\geq -2 \\ 3\geq -5 \\ 4\geq 3 \end{cases} \Rightarrow 24 = 2.3.4 \geq (-2)(-5).3 = 30$ (Sai)

Lời giải đúng:

Sử dụng BĐT Cô Si: $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2\geq 2|ab|\geq 0 \\ b^2+c^2\geq 2|bc|\geq 0 \\ c^2+a^2\geq 2|ca|\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c$$ (Đúng
)

Bình luận:

- Chỉ nhân các vế của BĐT cùng chiều (kết quả được BĐT cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.
- Cần chú ý rằng: $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ vì x, y không biết âm hay dương.
- Nói chung ta ít gặp bài toán sử dụng ngay BĐT Cô Si như bài toán nói trên mà phải qua một và phép biến đổi đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng BĐT Cô Si.

- Trong bài toán trên dấu " $\geq$ " $\Rightarrow$ đánh giá từ TBC sang TBN. 8 = 2.2.2 gợi ý đến việc sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số, 3 cặp số.

Bài 2 : Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \geq 64ab(a+b)^2 \quad \forall$ a,b ≥ 0

Giải

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 = \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\right]^4 = \left[(a+b)+2\sqrt{ab}\right]^4 \overset{\text{CôSi}}{\geq} \left[2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}\right]^4 = 2^4.2^2.ab.(a+b)^2 =$$
$$= 64ab(a+b)^2$$

Bài 3: Chứng minh rằng: (1 + a + b)(a + b + ab) $\geq$ 9ab $\forall$ a, b $\geq$ 0.

Giải

Ta có: (1 + a + b)(a + b + ab) $\geq 3\sqrt[3]{1.a.b}.\ 3.\sqrt[3]{a.b.ab} = 9ab$

Bình luận:

- 9 = 3.3 gợi ý sử dụng Cô-si cho ba số, 2 cặp. Mỗi biến a, b được xuất hiện ba lần, vậy khi sử dụng Cô Si cho ba số sẽ khử được căn thức cho các biến đó.

Bài 4: Chứng minh rằng: $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ $\forall$ a, b ≥ 0

Giải

Ta có: $3a^3 + 7b^3 \geq 3a^3 + 6b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3b^3 \overset{Côsi}{\geq} 3\sqrt[3]{3^3a^3b^3} = 9ab^2$

Bình luận:

- $9ab^2$ = 9.a.b.b $\Rightarrow$ gợi ý đến việc tách hạng tử $7b^3$ thành hai hạng tử chứa b^3 để khi áp dụng BĐT Cô-si ta có b^2. Khi đã có định hướng như trên thì việc tách các hệ số không có gì khó khăn.

Bài 5: Cho: $\begin{cases} a,b,c,d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \geq 3 \end{cases}$ $\quad CMR:\ abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Giải

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+d}\right) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Vậy:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+b} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81 \frac{abc\text{d}}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

$$\Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81}$$

Bài toán tổng quát 1:

Cho:

$$\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n > 0 \\ \dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \dfrac{1}{1+x_3} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{1+x_n} \geq n-1 \end{cases} \qquad CMR:\ x_1x_2x_3\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$$

Bình luận:

- Đối với những bài toán có điều kiện là các biểu thức đối xứng của biền thì việc biến đổi điều kiện mang tính đối xứng sẽ giúp ta xử lí các bài toán chứng minh BĐT dễ dàng hơn

Bài 6: Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ $\qquad CMR:\ \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8\ \ (1)$

Giải

$$VT(1) = \frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c} \overset{\text{Côsi}}{\geq} \frac{2\sqrt{bc}}{a}.\frac{2\sqrt{ca}}{b}.\frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8\ \ \text{(đpcm)}$$

Bài toán tổng quát 2:

Cho:

$$\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = 1 \end{cases} \qquad CMR:\ \left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\left(\frac{1}{x_3}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{x_n}-1\right) \ge (n-1)^n$$

Bài 7: CMR:

$$\left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \overset{(1)}{\ge} (1+a)(1+b)(1+c) \overset{(2)}{\ge} \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 \overset{(3)}{\ge} 8\sqrt{abc} \quad \forall a,b,c \ge 0$$

<u>Giải</u>

Ta có: $\left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{(1+a)+(1+b)+(1+c)}{3}\right)^3 \overset{Côsi}{\ge} (1+a)(1+b)(1+c)$ **(1)**

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) = \left[1+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+abc\right]$

$\overset{Côsi}{\ge} \left(1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{abc}+abc\right) = \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ **(2)**

Ta có: $\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 \overset{Côsi}{\ge} \left(2\sqrt{1.\sqrt[3]{abc}}\right)^3 = 8\sqrt{abc}$ **(3)**

Dấu " = " (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ 1+a = 1+b = 1+c $\Leftrightarrow$ a = b = c

Dấu " = " (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ ab = bc = ca và a = b = c $\Leftrightarrow$ a = b= c

Dấu " = " (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{abc}$ =1 $\Leftrightarrow$ abc = 1

Bài toán tổng quát 3:

Cho $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n \ge 0$. CMR:

$$\left(1+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n \overset{(1)}{\ge} (1+x_1)(1+x_2)\ldots\ldots(1+x_n) \overset{(2)}{\ge} \left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n}\right)^n \overset{(3)}{\ge} 2^n\sqrt{x_1x_2\ldots\ldots x_n}$$

Bình luận:

- Bài toán tổng quát trên thường được sử dụng cho 3 số, áp dụng cho các bài toán về BĐT lượng giác trong tam giác sau này.
- Trong các bài toán có điều kiện ràng buộc việc xử lí các điều kiện mang tình đồng bộ và đối xứng là rất quan trọng, giúp ta định hướng được hướng chứng minh BĐT đúng hay sai.

Trong việc đánh giá từ TBC sang TBN có một kỹ thuật nhỏ hay được sử dụng. Đó là kĩ thuật tách nghịch đảo.

3.2 Kỹ thuật tách nghịch đảo.

Bài 1: CMR: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2 \quad \forall a.b>0$

Giải

Ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\dfrac{b}{a}}=2$

Bài 2: CMR: $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2 \quad \forall a\in R$

Giải

Ta có: $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\left(a^2+1\right)+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\overset{Côsi}{\geq}2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\Leftrightarrow a^2+1=1\Leftrightarrow a=0$

Bài 3: CMR: $a+\dfrac{1}{b(a-b)}\geq 3 \quad \forall a>b>0$

Giải

Ta có nhận xét: b + a – b = a không phụ thuộc vào biến b do đó hạng tử đầu a sẽ được phân tích như sau:

$$a+\frac{1}{b(a-b)}=b+(a-b)+\frac{1}{b(a-b)}\overset{Côsi}{\geq}3\sqrt[3]{b.(a-b).\frac{1}{b(a-b)}}=3 \quad \forall a>b>0$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow b=(a-b)=\dfrac{1}{b(a-b)}$ ⇔ a = 2 và b = 1.

Bài 4: CMR: $a+\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}\geq 3 \quad \forall\ a>b>0$ **(1)**

Giải

Vì hạng tử đầu chỉ có a cần phải thêm bớt để tách thành các hạng tử sau khi sử dụng BĐT sẽ rút gọn cho các thừa số dưới mẫu. Tuy nhiên biểu thức dưới mẫu có dạng $(a-b)(b+1)^2$ (thừa số thứ nhất là một đa thức bậc nhất b, thừa số 2 là một thức bậc hai của b) do đó ta phải phân tích về thành tích của các đa thức bậc nhất đối với b, khi đó ta có thể tách hạng tử a thành tổng các hạng tử là các thừa số của mẫu.

Vậy ta có: $(a-b)(b+1)^2$ = (a - b)(b + 1)(b + 1) $\Rightarrow$ ta phân tích a theo 2 cách sau:

2a +2 = 2(a - b) + (b + 1) + (b + 1) hoặc a +1 = $(a-b)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}$

Từ đó ta có **(1)** tương đương :

$$\text{VT} + 1 = a+1+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}=(a-b)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{4}{(a-b)(b+1)(b+1)}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} 4.\sqrt[4]{(a-b).\frac{b+1}{2}.\frac{b+1}{2}.\frac{4}{(a-b)(b+1)(b+1)}}=4 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 5: CMR : $\frac{2a^3+1}{4b(a-b)}\geq 3 \quad \forall\begin{cases} a\geq\frac{1}{2} \\ \frac{a}{b}>1\end{cases}$

<u>**Giải**</u>

Nhận xét: Dưới mẫu số b(a-b) ta nhận thấy b + (a – b) = a. Chuyển đổi tất cả biểu thức sang biến a là 1 điều mong muốn vì việc sử lí với 1 biến sẽ đơn giản hơn. Biến tích thành tổng thì đây là một mặt mạnh của BĐT Cô-si. Do đó:

Ta có đánh giá về mẫu số như sau: $4.b(a-b)\leq 4.\left(\frac{b+(a-b)}{2}\right)^2=4.\frac{a^2}{4}=a^2$

Vậy: $\frac{2a^3+1}{4b(a-b)}\overset{\text{Côsi}}{\geq}\frac{2a^3+1}{a^2}=\frac{a^3+a^3+1}{a^2}=a+a+\frac{1}{a}\overset{\text{Côsi}}{\geq}3\sqrt[3]{a.a.\frac{1}{a}}=3$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} b=a-b \\ a=\frac{1}{a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$

Bình luận:

- Trong việc xử lí mẫu số ta đã sử dụng 1 kỹ thuật đó là đánh giá từ TBN sang TBC nhằm làm triệt tiêu biến b.

- Đối với phân thức thì việc đánh giá mẫu số, hoặc tử số từ TBN sang TBC hay ngược lại phải phụ thuộc vào dấu của BĐT.

Bài 6: Bài toán tổng quát 1.

Cho: $x_1 > x_2 > x_3 > ...., x_n > 0$ và $1 \le k \in Z$. CMR:

$$a_1 + \frac{1}{a_n\left(a_1-a_2\right)^k\left(a_2-a_3\right)^k..............\left(a_{n-1}-a_n\right)^k} \ge \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

<u>Giải</u>

VT =

$$a_n + \left(a_1-a_2\right) + \left(a_2-a_3\right) + ... + \left(a_{n-1}-a_n\right) + \frac{1}{a_n\left(a_1-a_2\right)^k\left(a_2-a_3\right)^k......\left(a_{n-1}-a_n\right)^k}$$

$$= a_n + \underbrace{\frac{\left(a_1-a_2\right)}{k} + .. + \frac{\left(a_1-a_2\right)}{k}}_{k} + .. + \underbrace{\frac{\left(a_{n-1}-a_n\right)}{k} + ... + \frac{\left(a_{n-1}-a_n\right)}{k}}_{k} + \frac{1}{a_n\left(a_1-a_2\right)^k\left(a_2-a_3\right)^k..\left(a_{n-1}-a_n\right)^k}$$

$$\ge \left[(n-1)k+2\right].\sqrt[(n-1)k+2]{a_n \underbrace{\frac{\left(a_1-a_2\right)}{k}..\frac{\left(a_1-a_2\right)}{k}}_{k}..\underbrace{\frac{\left(a_{n-1}-a_n\right)}{k}..\frac{\left(a_{n-1}-a_n\right)}{k}}_{k}.\frac{1}{a_n\left(a_1-a_2\right)^k\left(a_2-a_3\right)^k..\left(a_{n-1}-a_n\right)^k}}$$

$$= \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

Tóm lại: *Trong kỹ thuật tách nghịch đảo kỹ thuật cần tách phần nguyên theo mẫu số để khi chuyển sang TBN thì các phần chứa biến số bị triệt tiêu chỉ còn lại hằng số.*

Tuy nhiên trong kỹ thuật tách nghịch đảo đối với bài toán có điều kiện ràng buộc của ẩn thì việc tách nghịch đảo học sinh thường bị mắc sai lầm. Một kỹ thuật thường được sử dụng trong kỹ thuật tách nghịch đảo, đánh giá từ TBN sang TBC là kỹ thuật chọn điểm rơi.

3.3 Kỹ thuật chọn điểm rơi

Trong kỹ thuật chọn điểm rơi, việc sử dụng dấu " = " trong BĐT Cô-si và các quy tắc về tính đồng thời của dấu " = ", quy tắc biên và quy tắc đối xứng sẽ được sử dụng để tìm điểm rơi của biến.

Bài 1: Cho a ≥ 2 . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $S = a + \frac{1}{a}$

Giải

Sai lầm thường gặp của học sinh: $S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\frac{1}{a}} = 2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow$ vô lí vì giả thiết là a ≥ 2.

Cách làm đúng:

Ta chọn điểm rơi: ta phải tách hạng tử a hoặc hạng tử $\frac{1}{a}$ để sao cho khi áp dụng BĐT Cô-si dấu " = " xảy ra khi a = 2. Có các hình thức tách sau:

$$\left(a, \frac{1}{a}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{\alpha}a; \frac{1}{a}\right) & (1) \\ \left(\alpha a; \frac{1}{a}\right) & (2) \\ \left(a; \frac{1}{\alpha a}\right) & (3) \\ \left(a; \frac{\alpha}{a}\right) & (4) \end{array}\right.$$

Chẳng hạn ta chọn sơ đồ điểm rơi (1):
(sơ đồ điểm rơi (2), (3), (4) học sinh tự làm)

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}a = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4.$$

Vậy ta có: $S = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4}\frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$. Dấu " = " xảy ra ⇔ a = 2.

Bình luận:

- Ta sử dụng điều kiện dấu " = " và điểm rơi là a = 2 dựa trên quy tắc biên để tìm ra α = 4.

- Ở đây ta thấy tính đồng thời của dấu " = " trong việc áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số $\frac{a}{4},\frac{1}{a}$ và $\frac{3a}{4}$ đạt giá trị lớn nhất khi a = 2, tức là chúng có cùng điểm rơi là a = 2.

Bài 2: Cho a ≥ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = a + \frac{1}{a^2}$

<u>Giải</u>

Sơ đồ chọn điểm rơi: $\boxed{a = 2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 8.$

Sai lầm thường gặp:

$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \frac{2}{\sqrt{8a}} + \frac{7a}{8} \geq \frac{2}{\sqrt{8.2}} + \frac{7.2}{8} = \frac{2}{4} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow$ MinS = $\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm:

Mặc dù chọn điểm rơi a = 2 và MinS = $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số: Nếu a ≥ 2 thì $\frac{2}{\sqrt{8a}} \geq \frac{2}{\sqrt{8.2}} = \frac{2}{4}$ là đánh giá sai.

Để thực hiện lời giải đúng ta cần phải kết hợp với kỹ thuật tách nghịch đảo, phải biến đổi S sao cho sau khi sử dụng BĐT Cô-si sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

Lời giải đúng:

$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{6a}{8} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{6a}{8} = \frac{3}{4} + \frac{6a}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6.2}{8} = \frac{9}{4}$

Với a = 2 thì Min S = $\frac{9}{4}$

Bài 3: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp:

$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6\sqrt[6]{a.b.c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}=6$ $\Rightarrow$ Min S = 6

Nguyên nhân sai lầm :

Min S = 6 $\Leftrightarrow$ $a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$ $\Rightarrow$ $a+b+c=3>\frac{3}{2}$ trái với giải thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do S là mọt biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} a=b=c=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a}=\frac{1}{\alpha b}=\frac{1}{\alpha c}=\frac{2}{\alpha} \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}$ $\Rightarrow$ $\alpha=4$

Hoặc ta có sơ đồ điêm rơi sau:

$$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} \alpha a=\alpha b=\alpha c=\frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=2 \end{cases}\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=2 \Rightarrow \alpha=4 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha=4$$

Vậy ta có cách giải theo sơ đồ 2 như sau:

$$S=\left(4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\left(a+b+c\right)\ge 6\sqrt[6]{4a.4b.4c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3\left(a+b+c\right)$$

$\ge 12-3.\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$. Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì MinS = $\frac{15}{2}$

Bài 4: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm GTNN của $S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp:

$$S \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}.\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}.\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}} = 3\sqrt[6]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right).\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right).\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\ge 3\sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2.\frac{1}{b^2}}\right).\left(2\sqrt{b^2.\frac{1}{c^2}}\right).\left(2\sqrt{c^2.\frac{1}{a^2}}\right)} = 3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{MinS} = 3\sqrt{2}.$$

Nguyên nhân sai lầm:

MinS = $3\sqrt{2} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1 \Rightarrow a+b+c=3>\frac{3}{2}$ trái với giả thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a^2}=\frac{1}{\alpha b^2}=\frac{1}{\alpha c^2}=\frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{4}{\alpha} \Rightarrow \alpha=16$$

Lời giải

$$S = \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2}+.....+\frac{1}{16b^2}}_{16}} + \sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+.....+\frac{1}{16c^2}}_{16}} + \sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+.....+\frac{1}{16a^2}}_{16}}$$

$$\ge \sqrt{17\sqrt[17]{a^2.\underbrace{\frac{1}{16b^2}.....\frac{1}{16b^2}}_{16}}} + \sqrt{17\sqrt[17]{b^2.\underbrace{\frac{1}{16c^2}.....\frac{1}{16c^2}}_{16}}} + \sqrt{17\sqrt[17]{c^2.\underbrace{\frac{1}{16a^2}.....\frac{1}{16a^2}}_{16}}}$$

$$= \sqrt{17\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17\sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}} + \sqrt{17\sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}} = \sqrt{17}\left(\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right)$$

$$\ge \sqrt{17}\left[3\sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}}\right] = 3.\sqrt{17}\sqrt[17]{\frac{a}{16^8a^5b^5c^5}} = \frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{(2a2b2c)^5}}$$

$$\ge \frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \ge \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$ Dấu " = " xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2} \Rightarrow$ Min S = $\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bình luận:

- Việc chọn điểm rơi cho bài toán trên đã giải quyết một cách đúng đắn vềmặt toán học nhưng cách làm trên tương đối cồng kềnh. Nếu chúng ta áp dụng việc chọn điểm rơi cho BĐT Bunhiacôpski thì bài toán sẽ nhanh gọn hơn đẹp hơn.
- Trong bài toán trên chúng ta đã dùng một kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC, chiều của dấu của BĐT không chỉ phụ thuộc vào chiều đánh giá mà nó còn phụ thuộc vào biểu thức đánh giá nằm ở mẫu số hay ở tử số

Bài 5: Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

<u>Giải</u>

Sai lầm 1 thường gặp:

$$\begin{cases}\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b+c+d}.\frac{b+c+d}{a}}=2\\ \frac{b}{c+d+a}+\frac{c+d+a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{c+d+a}.\frac{c+d+a}{b}}=2\\ \frac{c}{a+b+d}+\frac{a+b+d}{c}\ge 2\sqrt{\frac{c}{a+b+d}.\frac{a+b+d}{c}}=2\\ \frac{d}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{d}\ge 2\sqrt{\frac{d}{a+b+c}.\frac{a+b+c}{d}}=2\end{cases}\Rightarrow S\ge 2+2+2+2=8$$

Sai lầm 2 thường gặp:

Sử dụng BĐT Cô-si cho 8 số:

$$S\ge 8\sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d}.\frac{b}{c+d+a}.\frac{c}{a+b+d}.\frac{d}{a+b+c}.\frac{b+c+d}{a}.\frac{c+d+a}{b}.\frac{a+b+d}{c}.\frac{a+b+c}{d}}=8$$

Nguyên nhân sai lầm:

Min S = 8 $\Leftrightarrow \begin{cases}a=b+c+d\\ b=c+d+a\\ c=d+a+b\\ d=a+b+c\end{cases}\Rightarrow$ a + b + c + d = 3(a + b + c + d) $\Rightarrow$ 1 = 3 $\Rightarrow$ Vô lý.

Phân tích và tìm tòi lời giải

Để tìm Min S ta cần chú ý S lá một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó Min S nếu có thường đạt tại "điểm rơi tự do" là : a = b = c = d > 0.(nói là điểm rơi tự do vì a, b, c, d không mang một giá trị cụ thể). Vậy ta cho trước a = b = c = d dự đoán $Min\ S\ =\ \frac{4}{3}+12=\frac{40}{3}$. Từ đó suy ra các đánh giá của các BĐT bộ phận phải có điều kiện dấu bằng xảy ra là tập con của điều kiện dự đoán: a = b = c = d > 0.

Ta có sơ đồ điểm rơi: Cho a = b = c = d > 0 ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{a+b+d}=\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b+c+d}{a}=\dfrac{c+d+a}{b}=\dfrac{a+b+d}{c}=\dfrac{a+b+c}{d}=\dfrac{3}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{3}{\alpha}\ \Rightarrow\ \alpha\ =\ 9$$

Cách 1: Sử dụng BĐT Cô-si ta có:

$$S=\sum_{a,b,c,d}\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{9a}\right)+\sum_{a,b,c,d}\frac{8}{9}.\frac{b+c+d}{9a}\geq$$

$$\geq 8\sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d}.\frac{b}{c+d+a}.\frac{c}{a+b+d}.\frac{d}{a+b+c}.\frac{b+c+d}{9a}.\frac{c+d+a}{9b}.\frac{a+b+d}{9c}.\frac{a+b+c}{9d}}$$

$$+\frac{8}{9}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)\geq$$

$$\geq\frac{8}{3}+\frac{8}{9}.12.\sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{d}{a}.\frac{c}{b}.\frac{d}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{d}{c}.\frac{a}{d}.\frac{b}{d}.\frac{c}{d}\right)}=\frac{8}{3}+\frac{8}{9}.12=\frac{40}{3}$$

Với a = b = c = d > 0 thì Min S = 40/3.

Bài 6: Với x>0, tìm giá trị nhỏ nhất của $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$

(Đề thi vào 10 Hà Nội - 2012)

Giải

$$M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$$

$$M=\left(4x^2-4x+1\right)+\left(x+\frac{1}{4x}\right)+2010$$

$$M=\left(2x-1\right)^2+\left(x+\frac{1}{4x}\right)+2010$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số x>0 và $\frac{1}{4x}>0$ ta có:

$$x+\frac{1}{4x}\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{4x}}\Leftrightarrow x+\frac{1}{4x}\geq 1$$

Mà $(2x-1)^2 \geq 0$ với mọi x

$$\Rightarrow M = (2x-1)^2 + \left(x + \frac{1}{4x}\right) + 2010 \geq 0 + 1 + 2010$$

$$\Leftrightarrow M \geq 2011$$

$\Rightarrow$MinM=2011

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4x} \\ (2x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{4} \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2011 khi $x = \frac{1}{2}$

3.4 Kỹ thuật đánh giá từ trung bình nhân (TBN) sang trung bình cộng (TBC)

Nếu như đánh giá từ TBC sang TBN là đánh giá với dấu " ≥ ", đánh giá từ tổng sang tích, hiểu nôm na là thay dấu " + " bằng dấu " . " thì ngược lại đánh giá từ TBN sang trung bình cộng là thay dấu " . " bằng dấu " + ". Và cũng cần phải chú ý làm sao khi biến tích thành tổng, thì tổng cũng phải triệt tiêu hết biến, chỉ còn lại hằng số.

Bài 1 : CMR $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+c)(b+d)}\quad \forall a,b,c,d>0$ **(1)**

Giải

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{ab}{(a+c)(b+d)}}+\sqrt{\dfrac{cd}{(a+c)(b+d)}}\le 1$ Theo BĐT Cô-si ta có:

$$VT\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{b}{b+d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+d}{b+c}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1\text{(đpcm)}$$

Bình luận:

- Nếu giữ nguyên vế trái thì khi biến tích thành tổng ta không thể triệt tiêu ẩn số $\Rightarrow$ ta có phép biến đổi tương đương **(1)** sau đó biến tích thành tổng ta sẽ được các phân thức có cùng mẫu số.
- Dấu " ≤ " gợi ý cho ta nếu sử dụng BĐT Cô-si thì ta phải đánh giá từ TBN sang TBC

Bài 2: CMR $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}\quad \forall\begin{cases}a>c>0\\ b>c>0\end{cases}$ **(1)**

Giải

Ta có (**1**) tương đương với : $\sqrt{\dfrac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\dfrac{c(b-c)}{ab}}\le 1$

Theo BĐT Cô-si ta có:

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{(a-c)}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{(b-c)}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a}+\frac{b}{b}\right)=1(\text{đpcm})$$

Bài 3: CMR $1+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\quad\forall a,b,c\ge 0$ **(1)**

Giải

Ta có biến đổi sau, **(1)** tương đương:

$$\sqrt[3]{1.1.1}+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\ \Leftrightarrow\ \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}\le 1$$

Theo BĐT Cô-si ta có:

$$VT\le\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{a+1}{1+a}+\frac{b+1}{1+b}+\frac{c+1}{1+c}\right]=\frac{1}{3}.3=1$$

Dấu " = " xảy ra ⇔ a = b = c > 0.

Ta có bài toán tổng quát 1:

CMR:

$$\sqrt[n]{a_1a_2.......a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2.......b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)........(a_n+b_n)}\qquad\forall\ a_i,b_i>0\left(i=\overline{1,n}\right)$$

Bài 4 : Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2\le(a+b)^4\quad\forall a,b>0$

Giải

Ta có: $16ab(a-b)^2=4.(4ab)(a-b)^2\le 4\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2=4\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2=(a+b)^4$

Bài 5: Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$ Chứng minh rằng $abc(a+b)(b+c)(c+a)\le\frac{8}{729}$

Giải

Sơ đồ điểm rơi:

Ta nhận thấy biểu thức có tính đối xứng do đó dấu " = " của BĐT sẽ xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Nhưng thực tế ta chỉ cần quan tâm là sau khi sử dụng BĐT Cô-si ta cần suy ra được điều kiện xảy ra dấu " = " là: a = b = c. Do đó ta có lời giải sau**:**

$$abc(a+b)(b+c)(c+a)\overset{\text{Côsi}}{\le}\left[\frac{a+b+c}{3}\right]^3\left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{729}$$

Trong kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC ta thấy thường nhân thêm các hằng số để sao cho sau biến tích thành tổng các tổng đó triệt tiêu các biến. Đặc biệt là đối với những bài toán có thêm điều kiện ràng buộc của ẩn số thì việc nhân thêm hằng số các em học sinh dễ mắc sai lầm. Sau đây ta lại nghiên cứu thêm 2 phương pháp nữa đó là phương pháp nhân thêm hằng số, và chọn điểm rơi trong việc đánh giá từ TBN sang TBC. Do đã trình bày phương pháp điểm rơi ở trên nên trong mục này ta trình bày gộp cả 2 phần .

3.5 Kỹ thuật nhân thêm hằng số trong đánh giá từ TBN sang TBC

Bài 1: Chứng minh rằng: $a\sqrt{(b-1)}+b\sqrt{(a-1)}\le ab\quad \forall a,b\ge 1$

Giải

Bài này chúng ta hoàn toàn có thể chia cả 2 vế cho ab sau đó áp dụng phương pháp đánh giá từ TBN sang TBC như phần trước đã trình bày, tuy nhiên ở đây ta áp dụng một phương pháp mới: phương pháp nhân thêm hằng số

Ta có : $$\begin{cases} a\sqrt{(b-1)}=a\sqrt{(b-1).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} a\dfrac{(b-1)+1}{2}=\dfrac{ab}{2} \\ b\sqrt{(a-1)}=b\sqrt{(a-1).1} \overset{\text{Côsi}}{\le} b.\dfrac{(a-1)+1}{2}=\dfrac{ab}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad a\sqrt{(b-1)}+b\sqrt{(a-1)} \le \frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=ab$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$

Bình luận:

- Ta thấy việc nhân thêm hằng số 1 vào biểu thức không hoàn toàn tự nhiên, tại sao lại nhân thêm 1 mà không phải là 2. Thực chất của vấn đề là chúng ta đã chọn điểm rơi của BĐT theo quy tắc biên là a = b = 1/2.

Nếu không nhận thức được rõ vấn đề trên học sinh sẽ mắc sai lầm như trong VD sau.

Bài 2: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất: $S=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b).1} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \dfrac{(a+b)+1}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{(b+c).1} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \dfrac{(b+c)+1}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{(c+a).1} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \dfrac{(c+a)+1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{2} = \frac{5}{2}$$

Nguyên nhân sai lầm

Dấu " = " xảy ra ⇔ a + b = b + c = c + a = 1 ⇒ a + b + c = 2 trái với giả thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau do đó điểm rơi của BĐT sẽ là $a=b=c=\frac{1}{3}$ từ đó ta dự đoán Max S = $\sqrt{6}$. ⇒ a + b = b + c = c + a = $\frac{2}{3}$ ⇒ hằng số cần nhân thêm là $\frac{2}{3}$. Vậy lời giải đúng là:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(a+b).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(a+b)+\frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(b+c).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(b+c)+\frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(c+a).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(c+a)+\frac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{2(a+b+c)+3.\frac{2}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.2 = \sqrt{6}$$

Bài toán trên nếu cho đầu bài theo yêu cầu sau thì học sinh sẽ có định hướng tốt hơn: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$. Tuy nhiên nếu nắm được kỹ thuật điểm rơi thì việc viết đầu bài theo hướng nào cũng có thể giải quyết được.

Bài 3: Cho $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ Tìm Max A = (3 – x)(12 – 3y)(2x + 3y)

<u>Giải</u>

$$A = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y) \overset{\text{Côsi}}{\le} \left[\frac{(6-2x)+(12-3y)+(2x+3y)}{3}\right]^3 = 36$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ 6 -2x = 12 - 3y = 2x + 3y = 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Bình luận:

- Việc chọn điểm rơi trong bài toán này đối với học sinh thường bị lúng túng. Tuy nhiên cắn cứ vào yêu cầu khi đánh giá từ TBN sang TBC cần phải triệt tiêu hết biến cho nên căn cứ vào các hệ số của tích ta nhân thêm 2 vào thừa số thứ nhất là một điều hợp lý.

Bài 4: Cho x, y > 0. Tìm Min f(x, y) = $\dfrac{(x+y)^3}{xy^2}$

<u>Giải</u>

Ta có: $xy^2 = \frac{1}{16}(4x)(2y)(2y) \le \frac{1}{16}\left(\frac{4x+2y+2y}{3}\right)^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}(x+y)\right]^3 = \frac{4}{27}(x+y)^3$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{xy^2} \ge \frac{(x+y)^3}{\frac{4}{27}(x+y)^3} = \frac{4}{27} \quad \Rightarrow Min\ f(x,y) = \frac{4}{27}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ 4x = 2y = 2y $\Leftrightarrow$ y = 2x > 0. Đó là tập hợp tất cả các điểm thuộc đường thẳng y = 2x với x dương.

Thực ra việc để hệ số như trên có thể tùy ý được miễn là sao cho khi sau khi áp dụng BĐT Cô-si ta biến tích thành tổng của x + y. (Có thể nhân thêm hệ số như sau: 2x.y.y).

Bình luận:

- Trong bài toán trên yêu cầu là tìm Min nên ta có thể sử dụng kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC cho phần ở dưới mẫu số vì đánh giá từ TNB sang TBC là đánh giá với dấu " $\le$ " nên nghịch đảo của nó sẽ là " $\ge$ ".
- Ta cũng có thể đánh giá tử số từ TBC sang TBN để có chiều " $\ge$ "

Bài toán tổng quát 1:

Cho $x_1, x_2, x_3..........x_4 > 0.$ $\;$ *Tìm Min* $f = \dfrac{\left(x_1 + x_2 + x_3..........+x_n\right)^{1+2+3+...+n}}{x_1.x_2^2.x_3^3..........x_n^n}$

Bài 5: Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall n \in N\ (n \ge 1)$

<u>Giải</u>

Với n = 1, 2 ta nhận thấy (1) đúng.

Với n $\ge$ 3 ta có:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}.\underbrace{1.1......1}_{n-2}} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\underbrace{1+1.......+1}_{n-2}}{n} = \frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n} < \frac{n+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Bài toán tổng quát 2:

Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad \forall\ m < n \in N$ **(1)**

<u>Giải</u>

Ta biến đổi **(1)** về bất đẳng thức tương đương sau: $\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m} < 1+\dfrac{1}{n}$

Ta có: $\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m} = \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{m}\right).\left(1+\dfrac{1}{m}\right).......\left(1+\dfrac{1}{m}\right)}_{m}.\underbrace{1.1.........1}_{n-m}}$

$$\overset{\text{Côsi}}{<} \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)+\left(1+\frac{1}{m}\right).......+\left(1+\frac{1}{m}\right)}^{m}+\overbrace{1+1+.........+1}^{n-m}}{n} = \frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right)+n-m}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

Bình luận

- Cần phải bình luận về dấu " = ": trong bài toán trên ta coi 1/m = a thế thì khi đó dấu bằng trong BĐT Cô-si xảy ra khi và chỉ khi 1+ a = 1 ⇔ a = 0. Nhưng thực tế thì điều trên tương đương với m tiến tới +∞, khi m là hữu hạn thì dấu "<" là hoàn toàn đúng. Chúng ta cũng nhận thấy nếu m tiến ra + ∞ thì hai vế của BĐT càng dần tới cùng một giá trị là e (cơ số tự nhiên của hàm logarit). Ta hiểu là trong quá trình này thì VP tiến nhanh hơn VT nhưng sau này khi tung ra ∞ thì tốc độ dần bằng nhau và khoảng cách ngày thu hẹp.(Mục này xin chỉ bình luận cùng với các bạcn đồng nghiệp)

Tóm lại : Để sử dụng BĐT Cô-si từ TBN sang TBC ta cần chú ý: Chỉ số căn thức là bao nhiêu thì số các số hạng trong căn là bấy nhiều. nếu số các số hạng nhỏ hơn chỉ số căn thì phải nhân thêm hằng số để số các số hạng bằng chỉ số căn

Bài 6: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Tìm Max $S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp:

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{(a+b).1.1}\le\frac{(a+b)+1+1}{3}$$
$$\sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{(b+c).1.1}\le\frac{(b+c)+1+1}{3}$$
$$\sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{(c+a).1.1}\le\frac{(c+a)+1+1}{3}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\frac{2(a+b+c)+6}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow \text{Max S} = \frac{8}{3}$$

Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Max S} = \frac{8}{3}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1 \\ c+a=1 \end{cases}\Rightarrow\ 2(a+b+c)=3\ \Rightarrow\ 2=3\ \Rightarrow\ \textit{Vô lý}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do S làmột biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S thường xảy ra tại điều kiện:

$\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b+c=\frac{2}{3} \\ c+a=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$ Vậy hằng số cần nhân thêm là $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$

Ta có lời giải:

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(a+b).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\frac{(a+b)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(b+c).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\frac{(b+c)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(c+a).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\frac{(c+a)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$\Rightarrow$ $$S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{2(a+b+c)+4}{3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{6}{3}=\sqrt[3]{18}$$

Vậy Max S = $\sqrt[3]{18}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b+c=\frac{2}{3} \\ c+a=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

3.6 Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong kỹ thuật ghép đối xứng chúng ta cần nắm được một số kiểu thao tác sau:

Phép cộng: $\begin{cases} 2(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x) \\ x+y+z=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y+z}{2}+\dfrac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân: $x^2y^2z^2=(xy)(yz)(zx)$; $xyz=\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}$ $(x, y, z \geq 0)$

Bài 1: Chứng minh rằng: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq a+b+c \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)\geq\sqrt{\dfrac{bc}{a}.\dfrac{ca}{b}}=c \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\right)\geq\sqrt{\dfrac{ca}{b}.\dfrac{ab}{c}}=a \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}\right)\geq\sqrt{\dfrac{bc}{a}.\dfrac{ab}{c}}=c \end{cases} \Rightarrow \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq a+b+c$$

. Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

Bài 2: Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geq\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c} \qquad \forall abc\neq 0$

Giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}.\dfrac{b^2}{c^2}}=\left|\dfrac{a}{c}\right|\geq\dfrac{a}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}.\dfrac{c^2}{a^2}}=\left|\dfrac{b}{a}\right|\geq\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}.\dfrac{c^2}{a^2}}=\left|\dfrac{c}{b}\right|\geq\dfrac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geq\left|\dfrac{b}{a}\right|+\left|\dfrac{c}{b}\right|+\left|\dfrac{a}{c}\right|\geq\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$$

Bài 3: Cho tam giác ΔABC, a,b,c là số đo ba cạnh của tam giác. CMR:

a) $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\dfrac{1}{8}abc$; **b)** $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\geq 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Giải

a) Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(p-a)(p-b)} \le \dfrac{(p-a)+(p-b)}{2} = \dfrac{c}{2} \\ \sqrt{(p-b)(p-c)} \le \dfrac{(p-b)+(p-c)}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \sqrt{(p-a)(p-c)} \le \dfrac{(p-a)+(p-c)}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{1}{8}abc$$

b) Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}} = \dfrac{2}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-c}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-c)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Dấu “ = ” xảy ra cho cả a) và b) khi vào chỉ khi Δ ABC đều: a = b = c

(p là nửa chu vi của tam giác ΔABC: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

Bài 4: Cho Δ ABC, a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$$

Giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} 0 \le (b+c-a)(c+a-b) \le \dfrac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c \\ 0 \le (c+a-b)(a+b-c) \le \dfrac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a \\ 0 \le (b+c-a)(a+b-c) \le \dfrac{(b+c-a)+(a+b-c)}{2} = b \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 0 \le (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ Δ ABC đều: a = b = c.

3.7 Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo cho 3 số, n số

Nội dung cần nắm đượccác thao tác sau:

1. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9 \quad \forall x,y,z>0$

2. $(x_1+x_2+........+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+........+\frac{1}{x_n}\right) \ge n^2 \quad \forall x_1,x_2,........,x_n>0$

Bài 1: Chứng minh rằng : $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 6 \ \ \forall a,b,c>0$ **(1)**

<u>**Giải**</u>

Ta biến đổi **(1)** tương đương: $\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\ge 9$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}\ge 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ (đpcm)

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\ge\frac{9}{a+b+c} \quad \forall a,b,c>0$

<u>**Giải**</u>

Ta biến đổi tương đương BĐT như sau: $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 9$

$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 9$ (đpcm)

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\ge\frac{3}{2} \ \ \forall a,b,c>0$ (BĐT Nesbit)

<u>**Giải**</u>

Ta có biến đổi tương đương sau: $\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9 \text{(đpcm)}$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2} \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Ta biến đổi BĐT như sau: $\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad c\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left[\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right]\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$$

3.8 Kỹ thuật đổi biến số

Có những bài toàn về mặt biểu thức toán học tương đối còng kềnh hoặc khó giải, khó nhận biết được phương hướng giải,ta có thể chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi về trạng thái dễ biến đổi hơn. Phương pháp trên gọi là phương pháp đổi biến.

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\ge\frac{3}{2}\quad\forall a,b,c>0$ (BĐT Nesbit)

Giải

Đặt: $\begin{cases}b+c=x>0\\c+a=y>0\\a+b=z>0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{y+z-x}{2};\ b=\frac{z+x-y}{2};\ c=\frac{x+y-z}{2}.$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\Leftrightarrow\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\ge 6$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, Thật vậy áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\text{VT}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}=2+2+2=6$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = z $\Leftrightarrow$ a = b = c

Bài 2: Cho ΔABC**.** Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$

Giải

Đặt: $\begin{cases}b+c-a=x>0\\c+a-b=y>0\\a+b-c=z>0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{z+x}{2};\ c=\frac{x+y}{2}.$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\Leftrightarrow\quad\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\ge x+y+z\qquad\textbf{(2)}$$

Ta có: VT **(2)** $\ge\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} \sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}=x+y+z$$

Bài 3: Cho Δ ABC. CMR : (b + c – a).(c + a – b).(a + b – c) ≤ abc **(1)**

Giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{y+z}{2};\ b=\dfrac{z+x}{2};\ c=\dfrac{x+y}{2}.$

Khi đó ta có BĐT **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau: $xyz\leq\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{y+z}{2}.\dfrac{z+x}{2}$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{y+z}{2}.\dfrac{z+x}{2}\geq\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx}=xyz$ (đpcm)

Bài 4: Cho ΔABC. CMR:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\ \textbf{(1)}$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} p-a=x>0 \\ p-b=y>0 \\ p-c=z>0 \end{cases}$ thì **(1)** ⇔ $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\geq\dfrac{x+y+z}{xyz}$ **(2)**

Ta có:

VT **(2)** $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{y^2}.\dfrac{1}{z^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{z^2}}$

$=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{x+y+z}{xyz}$

Dấu “ = ” xảy ra ⇔ x = y = z ⇔ a = b = c ⇔ Δ ABC đều.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 va abc = 1 thì : $\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}\leq1$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$1-\frac{1}{2+a}+1-\frac{1}{2+b}+1-\frac{1}{2+c}\geq1\Leftrightarrow\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}\geq1$$

Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x};$ thỏa điều kiện $a.b.c=\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}=1$. Bất đẳng thức đã cho

tương đương với: $\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left(x\left(x+2y\right)+y\left(y+2z\right)+z\left(z+2x\right)\right)\left(\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\right)\ge\left(x+y+z\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\right)\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\left(x\left(x+2y\right)+y\left(y+2z\right)+z\left(z+2x\right)\right)}=\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\left(x+y+z\right)^2}=1$$

4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG KHÁC CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

4.1 Áp dụng BĐT để giải phương trình và hệ phương trình

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

Giải

Điều kiện : x ≥ 0, y ≥ 1, z ≥ 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x.1}\le\frac{x+1}{2}$$

$$\sqrt{y-1}=\sqrt{(y-1).1}\le\frac{(y-1)+1}{2}$$

$$\sqrt{z-2}=\sqrt{(z-2).1}\le\frac{(z-2)+1}{2}=\frac{z-1}{2}$$

Suy ra : $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\le\frac{1}{2}(x+y+z)$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y-1=1\\z-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}.$

Vậy phương trình có nghiệm (x, y, z) = (1; 2; 3)

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1+x}=3$

Giải

Điều kiện: -1 ≤ x ≤ 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}}\le\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2}\qquad(1)$$

$$\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{\sqrt{1-x}\ .1}\le\frac{\sqrt{1-x}+1}{2}\qquad(2)$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\sqrt{\sqrt{1+x}\ .1}\le\frac{\sqrt{1+x}+1}{2}\qquad(3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}\le1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

Mặt khác, lại theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{(1-x).1} \le \dfrac{(1-x)+1}{2} = \dfrac{2-x}{2} \\ \sqrt{1+x} = \sqrt{(1+x).1} \le \dfrac{(1+x)+1}{2} = \dfrac{2+x}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} \le 1+\frac{2-x}{2}+\frac{2+x}{2} = 3$$

Từ (4) và (5) suy ra: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1+x} \le 3$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \\ 1-x=1 \\ 1+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 0

Bài3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1} = x^2-x+2$ **(1)**

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2+x-1} \le \dfrac{(x^2+x-1)+1}{2} = \dfrac{x^2+x}{2} \\ \sqrt{x-x^2+1} \le \dfrac{(x-x^2+1)+1}{2} = \dfrac{x-x^2+2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1} \le x+1$ **(2)**

Kết hợp (1) và (2) ta có: $x^2-x+2 \le x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=1.$

Thử lại ta có x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x}-1 = xy \end{cases}$

Giải

Điều kiện: x ≥ 1, y ≥ 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{1.(x-1)} \le \frac{1+(x-1)}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow y\sqrt{x-1} \le \frac{xy}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự: $\sqrt{y\text{-}1} \le \dfrac{y}{2} \Rightarrow x\sqrt{y-1} \le \dfrac{xy}{2}$ **(2)**

Cộng (1), (2) ta được $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x}-1 \le xy$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$.

Thử lại thấy: x = y = 2 cũng thỏa mãn phương trình thứ nhất của hệ

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (2;2)

Bài 5: Cho số nguyên n >1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{1}{x_3}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) \end{cases}$

Giải

Từ hệ đã cho suy ra x_1, x_2, … , x_n là cùng dấu. Giả sử $x_i > 0$ với mọi i. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) \geq 1$.Tương tự: $x_i \geq 1$ với mọi i.

Cộng n phương trình của hệ theo từng vế ta được: $x_1 + x_2 + ... + x_n = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}$

Vì $x_i \geq 1$ nên $x_i \geq \dfrac{1}{x_i}$ với mọi i, suy ra: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$

Giải

Rõ ràng hệ có nghiệm x = y = z = 0. Với x,y,z ≠ 0, từ hệ đã cho suy ra x>0, y>0, z>0. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$1 + x^2 \geq 2x \Rightarrow y = \frac{2x^2}{1+x^2} \leq \frac{2x^2}{2x} = x$$

Tương tự: $z = \dfrac{2y^2}{1+y^2} \leq y$ *và* $x = \dfrac{2z^2}{1+z^2} \leq z$.

Vậy : $y \leq x \leq z \leq y$, suy ra x = y = z.

Thay y = x vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow 2x = 1 + x^2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì x } > 0)$$

Vậy hệ có hai nghiệm (x, y, z) = {(0; 0; 0) ; (1; 1; 1)}

Bài 7: Tìm số nguyên dương n và các số dương $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ thỏa các điều kiện

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n = 2 & (1) \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots. + \dfrac{1}{a_n} = 2 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế, ta được: $\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) + .. + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = 4$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a_i + \frac{1}{a_i} \ge 2$ với i = 1, 2, … , n

Suy ra 4 ≥ 2n hay n ≤ 2:

Với n = 1: hệ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ \dfrac{1}{a_1} = 2 \end{cases}$ vô nghiệm; Với n = 2: hệ $\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} = 2 \end{cases}$ có nghiệm $a_1 = a_2 = 1$

Vậy: n = 2 và $a_1 = a_2 = 1$

4.2 Sử dụng bất đẳng thức Cô - si để chứng minh bđt và tìm cực trị hình học:

Bài 1. Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại E; AF cắt tia DC tại I.

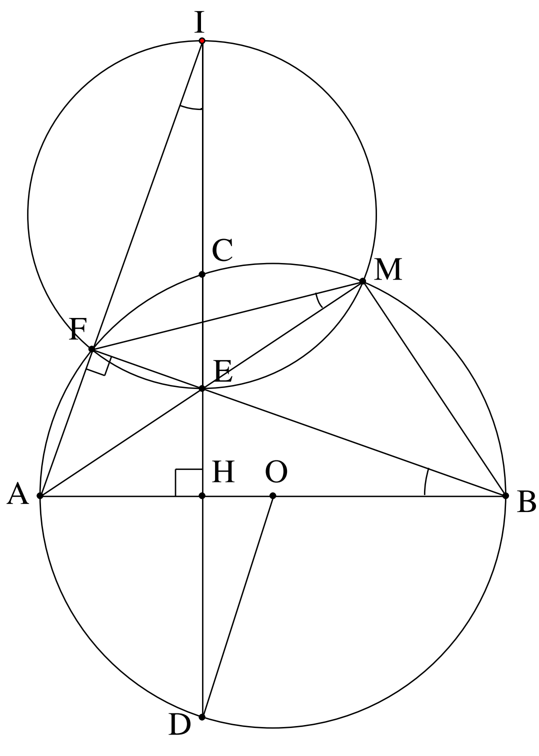
a) Chứng minh rằng tứ giác AHEF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: HA. HB = HE. HI

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF cắt AE tại M. Chứng minh rằng: M thuộc (O;R)

d) Tìm vị trí của H trên OA để tam giác OHD có chu vi lớn nhất.

<u>Giải câu d</u>



Ta có chu vi tam giác OHD = OH+OD+HD = R+ OH+OD

$\left(OH+OD\right)^2 = OH^2 + OD^2 + 2OH.OD = R^2 + 2OH.OD$

Mµ $2OH.OD \le OH^2 + OD^2$ (BĐt Cô - Si) $\Leftrightarrow 2OH.OD \le R^2$

$\Rightarrow \left(OH+OD\right)^2 \le R^2 + R^2 \Leftrightarrow OH + OD \le R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi $\Delta OHD \le R + R\sqrt{2} \Rightarrow$ Chuvi$\Delta OHD_{Max} = R + R\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ OH = OD $\Leftrightarrow$ ΔOHD vuông cân tại H

$\Rightarrow OH = R.\cos 45^0 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Bài 2. Cho (O) đường kính AB; trên tia đối của tia AB lấy điểm C, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại C; lấy điểm M bất kỳ trên đường tròn, tia BM cắt d tại D, tia DA cắt (O) tại điểm thứ hai E.

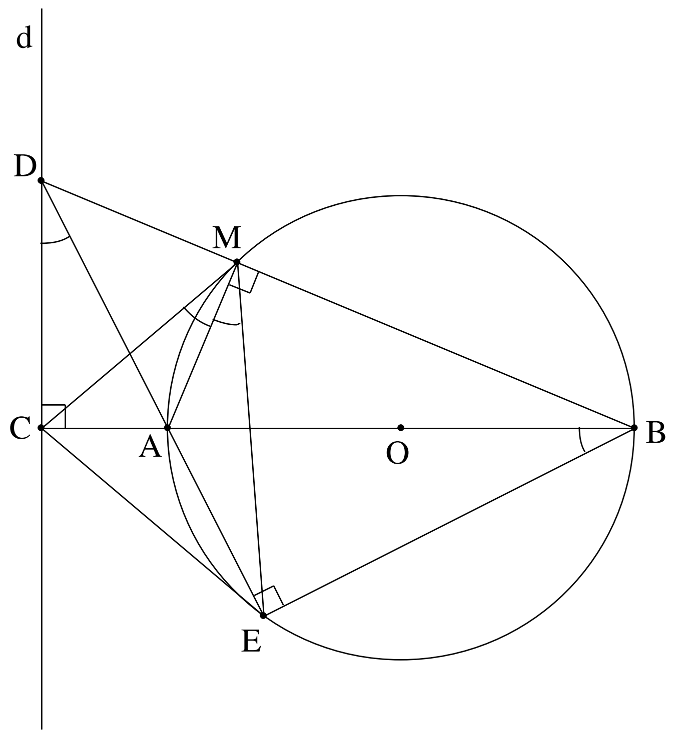
a) Chứng minh tứ giác ACDM là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: BM.BD = BA. BC

c) Chứng minh MA là phân giác $\widehat{CME}$

d) Giả sử CA = 4cm; AB = 9cm. Tìm vị trí của điểm M trên (O) để khoảng cách giữa hai điểm D và E nhỏ nhất.

Giải câu d



Chứng minh được AE. AD = AC.AB = 4.9 = 36

áp dụng BĐT Cô si cho AE và AD ta có:

$$AE + AD \geq 2\sqrt{AE.AD} \Leftrightarrow AE + AD \geq 2\sqrt{36} \Leftrightarrow AE + AD \geq 12$$

$$\Rightarrow (AE + AD)\min = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} AE = AD \\ AE.AD = 36 \end{cases} \Leftrightarrow AE = AD = 6cm$$

Từ điều này có nhiều cách xác định vị trí M, chẳng hạn:

Tính được $DC = \sqrt{20}$

$$\Rightarrow tg\widehat{CBD} = \frac{DC}{CB} = \frac{\sqrt{20}}{13} \Rightarrow \widehat{CBD} = 18^o59'$$

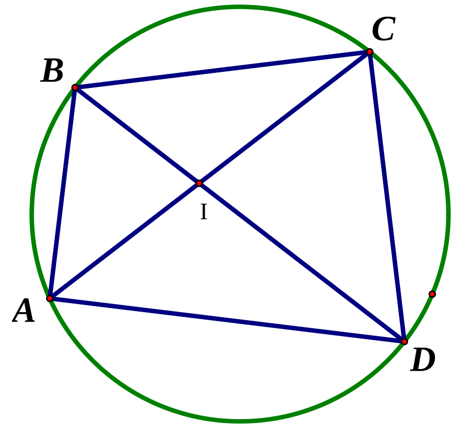
Vậy M là giao điểm của tia BD với (O) sao cho $\widehat{CBD} = 18^o59'$

Bài 3.

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh rằng :

$$\frac{AB}{CD} + \frac{CD}{AB} + \frac{BC}{AD} + \frac{AD}{BC} \le \frac{IA}{IC} + \frac{IC}{IA} + \frac{IB}{ID} + \frac{ID}{IB}$$

Giải



Dễ thấy $\Delta ABI \backsim \Delta DCI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{AI}{DI}\cdot\frac{BI}{CI}} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{\frac{AI}{DI}\cdot\frac{BI}{CI}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{AI}{CI} + \frac{BI}{ID}\right) \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IB}{ID}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{CD} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC} + \frac{IB}{ID}\right) \quad (3)$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có:

$$\frac{CD}{AB} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IC}{IA} + \frac{ID}{IB}\right) \quad (4)$$

$$\frac{BC}{AD} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IB}{ID} + \frac{IC}{IA}\right) \quad (5)$$

$$\frac{AD}{BC} \le \frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC} + \frac{ID}{IB}\right) \quad (6)$$

Dấu bằng trong (4), (5), (6) xảy ra tương ứng khi $\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB}$, $\frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IA}$, $\frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB}$.

Cộng từng vế của (3),(4), (5), (6) ta được điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi IA = IB = IC = ID $\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

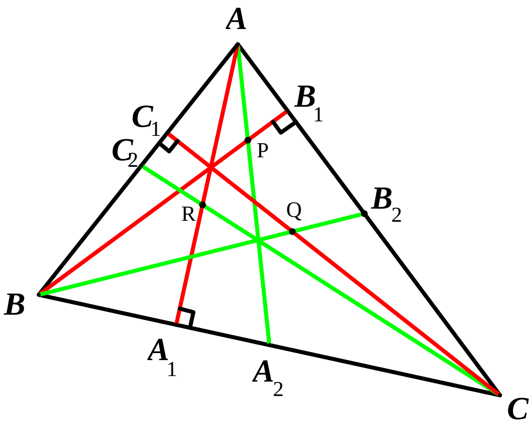
Bình luận:: Trong bài toán trên, mặc dù dấu của bất đẳng thức cần chứng minh là $\le$, trong khi cả hai vế của bất đẳng thức đều ở dạng tổng của các hạng tử. Chìa khoá để giải quyết bài toán ở đây chính là việc chuyển đổi mỗi hạng tử của vế trái thành dạng căn bậc hai của một tích ($\frac{AB}{CD}=\sqrt{\frac{AI}{DI}\frac{BI}{CI}}$, …), từ đó áp dụng bất đẳng thức Cô-si chứng minh được mỗi hạng tử đó của vế trái $\le$ một nửa tổng hai hạng tử của vế phải. Vì vậy, việc linh hoạt biến đổi bài toán để áp dụng được bất đẳng thức Cô-si trong những trường hợp cụ thể là rất cần thiết, đòi hỏi ở người làm toán sự tư duy, tìm tòi và sáng tạo.

<u>Bài 4</u>: Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ ba chiều cao AA_1, BB_1, CC_1; ba trung tuyến AA_2, BB_2, CC_2. Giả sử $AA_2 \cap BB_1=P$, $BB_2 \cap CC_1=Q$, $CC_2 \cap AA_1=R$.

Chứng minh rằng: $$\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}\ge 6$$

Chứng minh:

Áp dụng định lý Me-ne-la-uyt trong tam giác AA_2C với đường thẳng BRB_1, ta có:



$$\frac{AP}{PA_2}\cdot\frac{A_2B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Suy ra: $$\frac{AP}{PA_2}=\frac{BC}{A_2B}\cdot\frac{B_1C}{A_2B}\quad(1)$$

Do AA_2 là trung tuyến nên $BC = 2.A_2B$,

và vì $BB_1 \perp AC$

nên $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{BB_1.\text{CotA}}{BB_1.\text{CotC}}=\frac{\tan C}{\tan A}$

Vậy từ (1) $\Rightarrow$ $\frac{AP}{PA_2}=2\frac{\tan C}{\tan A}$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{BQ}{QB_2} = 2\frac{\tan A}{\tan B};\frac{CR}{RC_2} = 2\frac{\tan B}{\tan C}$$

Từ đó: $\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} = 2\left(\frac{\tan A}{\tan B} + \frac{\tan B}{\tan C} + \frac{\tan C}{\tan A}\right)$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si, thì:

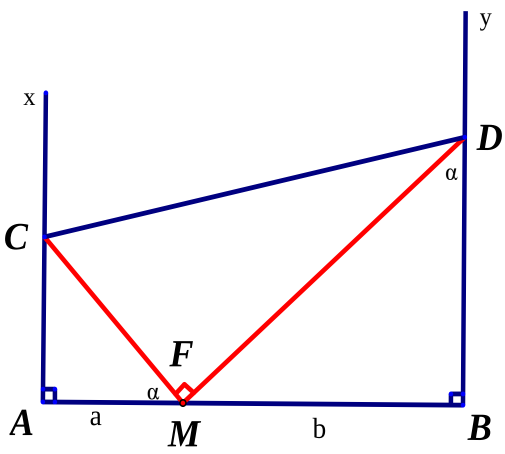
$$\frac{\tan A}{\tan B} + \frac{\tan B}{\tan C} + \frac{\tan C}{\tan A} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\tan A}{\tan B}.\frac{\tan B}{\tan C}.\frac{\tan C}{\tan A}}$$

$$\frac{\tan A}{\tan B} + \frac{\tan B}{\tan C} + \frac{\tan C}{\tan A} \geq 3$$

Vậy: $\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \geq 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\tan C}{\tan A}$ tức là tam giác ABC đều.

<u>**Bài 5**</u>**:** Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Giải



Ta có: $S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD$

Đặt : $MA = a$, $MB = b$, $\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

Khi đó $MC = \frac{a}{\cos\alpha}$, $MD = \frac{b}{\sin\alpha}$

Nên: $S_{MCD} = \frac{1}{2}.\frac{ab}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $2\sin\alpha\cos\alpha$ lớn nhất.

Theo bất đẳng thức Cô-si: $2\sin\alpha\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Nên $S_{MCD} \geq ab$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

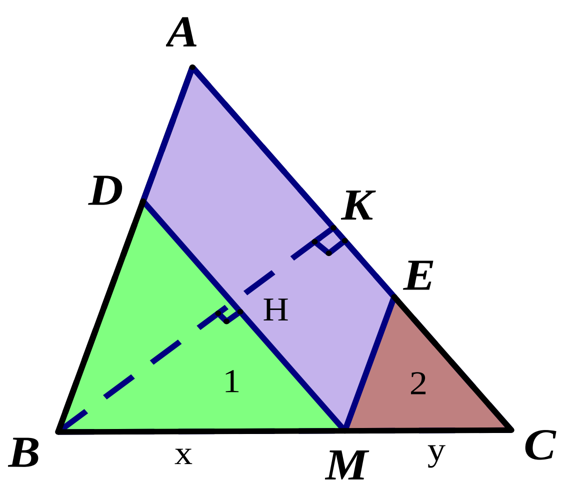
Như vậy *Min* S_{MCD} = ab. Điểm C, D được xác định thứ tự trên các tia Ax, By sao cho AC = AM, BD = BM.

Bình luận: Điểm sáng tạo trong cách giải trên là ta đã chọn biến là các tỉ số lượng giác sinα, cosα. Giữa sinα, cosα , $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ có liên hệ bởi BĐT Cô-si: $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Bài 6: Cho tam giác ABC, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và AB, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D, E. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.

Giải:

Cách 1 :



Ta thấy S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}}$ lớn nhất.

Kẻ BK ⊥ AC, cắt MD ở H.

$S_{ADME} = MD.HK$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BK$

Suy ra: $\dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2.\dfrac{MD}{AC}.\dfrac{HK}{BK}$

Đặt MB = x, MC = y, ta có:

$\dfrac{MD}{AC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{x}{x+y}$, $\dfrac{HK}{BK} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{y}{x+y}$

Do đó : $\dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \dfrac{2xy}{(x+y)^2}$ (*)

Theo bất dẳng thức Cô-si: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \dfrac{2xy}{(x+y)^2} \leq \dfrac{1}{2}$ (**)

Từ (*) và (**), ta được: $\dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}} \leq \dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Như vậy *max* $S_{ADME} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$, khi đó M là trung điểm của BC.

Cách 2: Ký hiệu $S_{ABC} = S$, $S_{DBM} = S_1$, $S_{EMC} = S_2$.

Rõ ràng S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{S_1+S_2}{S}$ nhỏ nhất.

Vì các tam giác DBM và EMC cùng đồng dạng với tam giác ABC nên:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{BM}{BC}\right)^2,\ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{MC}{BC}\right)^2$$

Suy ra: $\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{BM^2+MC^2}{BC^2} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$. Như vậy $S_1 + S_2 \geq \frac{1}{2}S$ nên $S_{ADME} \leq \frac{1}{2}S$. Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x = y$.

Kết luận: *max* $S_{ADME} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, khi đó M là trung điểm của BC.

Bình luận: Ở cách 1, ta đã xét một biểu thức trung gian, đó là tỉ số giữa diện tích hình bình hành ADME và diện tích tam giác ABC, bất đẳng thức Cô-si dạng $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$. Còn ở cách 2, ta cũng xét biểu thức trung gian đó là tỉ số giữa tổng diện tích của các tam giác DBM, EMC và diện tích tam giác ABC, vì vậy lại áp dụng bất đẳng thức Cô-si dạng $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$. Qua đây cho thấy, cùng một bài toán, nhưng với cách khai thác khác nhau thì việc vận dụng bất đẳng thức Cô-si sẽ ở những dạng khác nhau. Vấn đề là đòi hỏi ở người làm toán khả năng vận dụng linh hoạt, hợp lý để đạt được mục đích cụ thể.

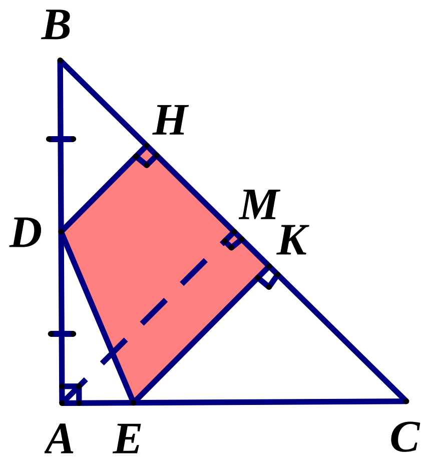
Dưới đây là hai bài toán, vẫn là bài toán cực trị hình học nhưng ta lại vận dụng bất đẳng thức Cô-si ở khía cạnh khác. Với hai số dương x, y có tổng x + y không đổi, thì tích xy đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi x = y. Ngược lại nếu tích xy không đổi thì tổng x + y đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

<u>Bài 7</u>: Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

Giải

Ta có: $2S_{DEKH} = (DH+EK).HK = (BH+KC).HK$

Ta thấy tổng (BH+KC) + HK không đổi (bằng BC = a cho trước) nên tích (BH+KC).HK lớn nhất khi và chỉ khi $BH+KC = HK = \frac{a}{2}$.



Do đó: $max\ S_{DEKH} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

Khi đó hình thang DEKH có đường cao $HK = \frac{a}{2}$ và nếu kẻ $AM \perp BC$ thì do tam giác ABC vuông cân tại A nên $MB = MC = \frac{a}{2}$, nên $HB = HM = \frac{a}{4}$

Vậy $KC = BC - BH - HK = a - \frac{a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$

Khi đó $DH = HB = \frac{a}{4}$, $EK = KC = \frac{a}{4}$. Hình thang DEKH là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC.

<u>Bài 8</u>: Cho đường tròn (O; r) nội tiếp tam giác ABC. Kẻ đường thẳng qua O cắt hai cạnh CA, CB của tam giác theo thứ tự ở M và N. Đường thẳng ở vị trí nào thì tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất?

Giải

Gọi S là diện tích ΔCMN, ta có :

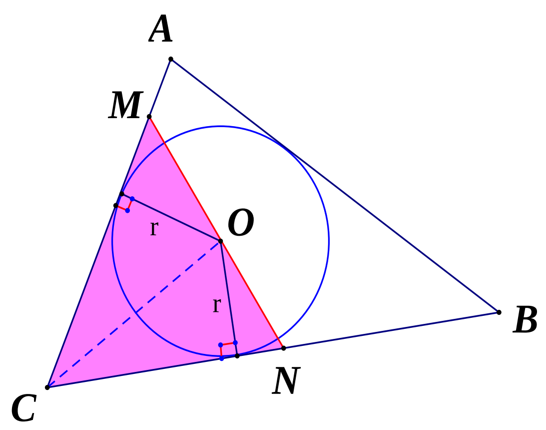
$S = S_{OCM} + S_{OCN} = \frac{1}{2}(CM + CN).r$

Do đó: $\frac{S}{r} = \frac{1}{2}(CM + CN)$ (1)

Theo bất đẳng thức Cô-si:

$\frac{1}{2}(CM + CN) \geq \sqrt{CM.CN}$ (2)

Mặt khác: $CM.CN \geq 2S$ (3)



Hình 7

Kết hợp (1), (2), (3) suy ra: $\frac{S}{r} = \frac{1}{2}(CM + CN) \geq \sqrt{CM.CN} \geq \sqrt{2S}$

hay $S \geq \sqrt{2S}.r \Leftrightarrow S^2 \geq 2S.r^2 \Leftrightarrow S \geq 2r^2$. Vậy S nhỏ nhất bằng $2r^2$ khi CM = CN.

Tam giác CMN cân đỉnh C có CO là phân giác nên $CO \perp MN$.

Kết luận: Đường thẳng $MN \perp CO$ tại O thì ΔCMN có diện tích nhỏ nhất.

Bình luận: Có thể diễn đạt kết quả bài toán trên dưới dạng sau: Cho điểm O thuộc tia phân giác của góc C, một đường thẳng bất kì đi qua O cắt hai cạnh của góc C tại M và N. Tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CO là đường cao của tam giác.

Cách khác: Cho điểm O thuộc tia phân giác của góc C, một đường thẳng bất kì đi qua O cắt hai cạnh của góc C tại M và N. Tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CO là trung tuyến của tam giác.

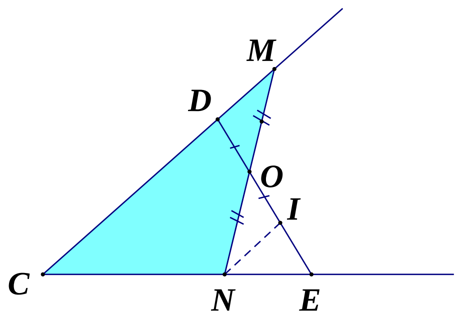
Ta còn có kết quả mạnh hơn bằng cách bỏ điều kiện O thuộc tia phân giác góc C: Cho điểm O nằm trong góc C, một đường thẳng bất kì đi qua O cắt hai cạnh của góc C tại M và N. Tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CO là trung tuyến của tam giác. Dưới đây là hai cách giải bài toán này:

<u>Cách 1</u> : Xét ΔCMN nhận CO là trung tuyến và ΔCDE có DE đi qua O nhưng OD < OE (như hình vẽ 7.1). Lấy I trên đoạn OE sao cho OI = OD.

Ta có: $\Delta ODM = \Delta OIN$ (c.g.c)

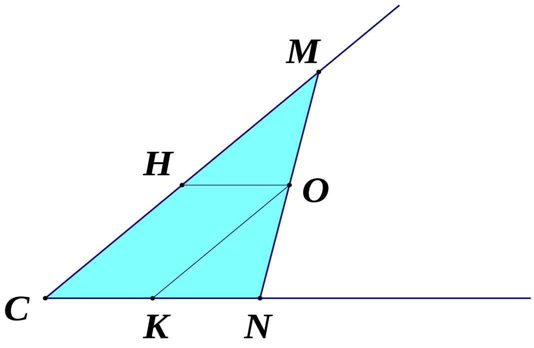
=> $S_{ODM} = S_{OIN} \Leftrightarrow S_{CMN} < S_{CDE}$.

<u>Cách 2</u>: Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của góc C, tạo thành hình bình hành OHCK (như hình vẽ 7.2).



Theo kết quả **Bài 6**, ta có:

$S_{OHCK} \leq \frac{1}{2} S_{CMN}$



$\Leftrightarrow$ $S_{CMN} \geq 2S_{OHCK}$.

Do góc C và điểm O cố định nên S_{OHCK} không đổi.

Vì vậy *min* $S_{CMN} = 2S_{OHCK}$, khi O là trung điểm của MN.

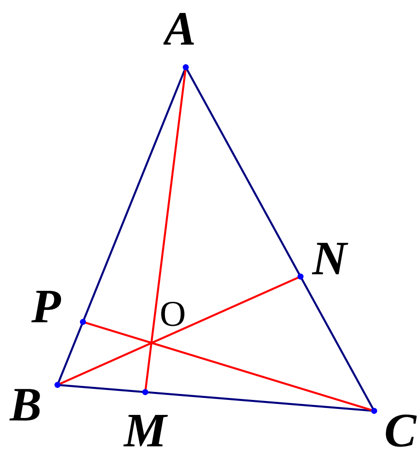
Để dựng điểm M, ta chỉ cần lấy M sao cho H là trung điểm của CM

<u>Bài 9:</u> Cho ΔABC, O là điểm tuỳ ý trong tam giác. AO, BO, CO kéo dài cắt các cạnh đối diện thứ tự tại M, N, P. Chứng minh : $\frac{AO}{OM} + \frac{BO}{ON} + \frac{CO}{OP} \geq 6$.

Giải

Theo định lý Xe-va, ta có :

$$\frac{MO}{MA} + \frac{NO}{NB} + \frac{PO}{PC} = 1 \qquad (1)$$



Áp dụng kết quả bài toán gốc với trường hợp riêng thứ 2, ta có :

$$\left(\frac{MA}{MO} + \frac{NB}{NO} + \frac{PO}{PC}\right)\left(\frac{MO}{MA} + \frac{NO}{NB} + \frac{PO}{PC}\right) \geq 9 \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) suy ra : $\frac{MA}{MO} + \frac{NB}{NO} + \frac{PO}{PC} \geq 9$

$$\Leftrightarrow \frac{MO+AO}{MO} + \frac{NO+BO}{NO} + \frac{OP+CO}{OP} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{AO}{MO} + 1 + \frac{BO}{NO} + 1 + \frac{CO}{OP} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{AO}{MO} + \frac{BO}{NO} + \frac{CO}{OP} \geq 6$$

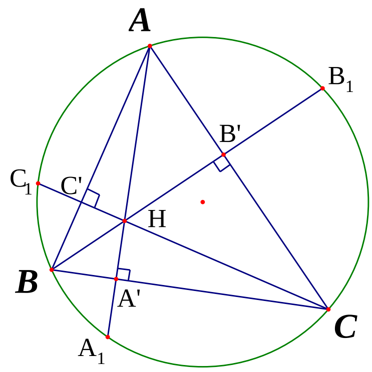
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MO}{MA} = \frac{NO}{NB} = \frac{PO}{PC}$, mà $\frac{MO}{MA} + \frac{NO}{NB} + \frac{PO}{PC} = 1$

Nên $\frac{MO}{MA} = \frac{NO}{NB} = \frac{PO}{PC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC.

<u>Bài 10</u> : Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Ba chiều cao AA', BB', CC' thứ tự cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng $\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} \geq \frac{9}{4}$

Giải

Gọi H là trực tâm ΔABC Dễ thấy A'H = A'A_1, B'H = B'B_1, C'H = C'C_1



Theo bài toán gốc, ta có :

$$\left(\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1}\right).\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) \geq 9$$

(*)

Xét $\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} = 3 + \frac{A'H}{AA'} + \frac{B'H}{BB'} + \frac{C'H}{CC'}$

Mặt khác, theo định lí Xê-va : $\frac{A'H}{AA'} + \frac{B'H}{BB'} + \frac{C'H}{CC'} = 1$

Nên: $\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} = 3 + 1 = 4$

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow$ $\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} \geq \frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AA_1}{AA'} = \frac{BB_1}{BB'} = \frac{CC_1}{CC'} \Leftrightarrow 1 + \frac{A'A_1}{AA'} = 1 + \frac{B'B_1}{BB'} = 1 + \frac{C'C_1}{CC'}$.

$\Leftrightarrow \frac{A'H}{AA'} = \frac{B'H}{BB'} = \frac{C'H}{CC'} \Leftrightarrow$ H là trọng tâm của ΔABC.

$\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều.

<u>Bài 11</u> : Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Ba trung tuyến AA', BB', CC' lần lượt cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} \leq \frac{9}{4} \qquad (*)$$

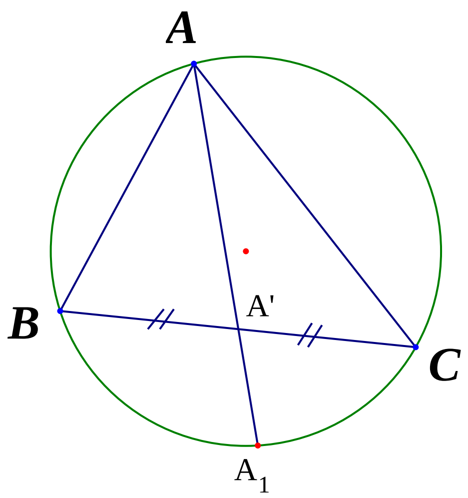
Giải

Đặt AB = c, AC = b, BC = a.

Vì tứ giác ABA_1C nội tiếp (O), AA_1 cắt BC tại A' nên: $AA'.A'A_1 = A'B.A'C = \frac{a^2}{4}$

=> $AA'.AA_1 = AA'.(AA' + A'A_1)$

$$= AA'^2 + AA'.A'A_1 = AA'^2 + \frac{a^2}{4}$$



Mà AA' là trung tuyến của ΔABC nên:

$$AA'^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Suy ra: $$AA'.AA_1 = \frac{b^2+c^2}{2}$$

Ta có:

$$\frac{AA'}{AA_1} = \frac{AA'^2}{AA'.AA_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2+2c^2-a^2}{b^2+c^2} = 1 - \frac{a^2}{b^2+c^2} \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{BB'}{BB_1} = 1 - \frac{b^2}{a^2+c^2} \quad (2) \qquad \text{và} \qquad \frac{CC'}{CC_1} = 1 - \frac{c^2}{a^2+b^2} \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2), và (3) thì :

$$(*) \Leftrightarrow \quad 3 - \frac{1}{2}.\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a^2}{b^2+c^2} + 1 + \frac{b^2}{a^2+c^2} + 1 + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\,(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow [\,(b^2 + c^2)+(a^2+ c^2) + (a^2 + b^2)].\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge 9 \ (**)$$

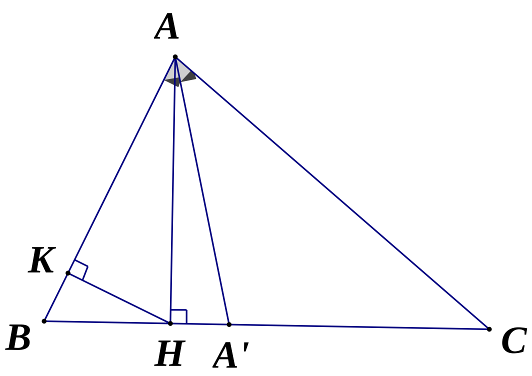
Rõ ràng (**) đúng với bài toán gốc nêu ở trên. Do đó (*) đúng.

Dấu bằng trong (*) xảy ra khi và chỉ khi a = b = c, tức là ΔABC đều.

Bài 12: Cho tam giác ABC. Vẽ ba phân giác AA', BB', CC'. Gọi a_1, b_1, c_1 tương ứng là các khoảng cách từ A' đến AB, B' đến BC, C' đến CA. Gọi h_a, h_b, h_c tương ứng là ba chiều cao của tam giác kẻ từ A, B, C. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} \geq \frac{3}{2}$$

Giải



Kẻ AH ⊥ BC và A'K ⊥ AB

Theo đó, AH = h_a, A'K = a_1.

Trong ΔABA' có :

$$BA'.h_a = AB.a_1 = c.a_1$$

Suy ra: $$\frac{BA'}{c} = \frac{a_1}{h_a} \qquad (1)$$

Mặt khác, do AA' là phân giác của ΔABC,

nên : $$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BA'}{BA'+A'C} = \frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow BA' = \frac{ac}{b+c} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\frac{a_1}{h_a} = \frac{a}{b+c} \qquad (3)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{b_1}{h_b} = \frac{b}{c+a} \quad (4) \qquad \text{và} \qquad \frac{c_1}{h_c} = \frac{c}{a+b} \quad (5)$$

Cộng từng về của (3), (4), (5), ta được:

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

KẾT QUẢ CỦA ĐỀ TÀI

Trong quá trình dạy học, việc sử dụng đề tài " ***Sử dụng bất đẳng thức Cô - si trong giải toán THCS"*** đã mang lại một số kết quả sau:

- Học sinh rất hứng thú, không còn sợ bất đẳng thức nhưng lúc mới tiếp cận.

- Học sinh bước đầu vận dụng bất đẳng thức Cô - si vào giải các dạng toán đơn giản như: chứng minh bất đẳng thức đơn giản; tìm cực trị đại số.

- Học sinh có được các kỹ thuật cơ bản sử dụng bất đẳng thức Cô-si và ít mắc sai lầm khi vận dụng.

- Học sinh giỏi vận dụng tốt bất đẳng thức Cô-si trong các kỳ thi học sinh giỏi, thi vào trường chuyên lớp chọn, thi vào lớp 10 THPT.

KẾT LUẬN

Đề tài " ***Sử dụng bất đẳng thức Cô - si trong giải toán THCS*** " bước đầu đã đạt được một số mục đích của người viết: giới thiệu một số kỹ thuật sử dụng và ứng dụng của bất đẳng thức Cô-si trong giải toán THCS.

Chúng ta đều biết vai trò quan trọng của bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức Cô-si trong toán học hiện nay. Vai trò này với học sinh giỏi toán, học sinh chuyên toán lại càng quan trọng. Nó giúp học sinh có những kiến thức nền về bất đẳng thức, từ đó các em có thể phát triển thêm tư duy về chứng minh, sử dụng bất đẳng thức trong việc giải các dạng toán từ đơn giản đến phức tạp.

Tuy nhiên với góc nhìn của cá nhân, đề tài khó tránh khỏi các sai sót. Đặc biệt là các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô-si chưa đầy đủ, hệ thống bài tập chưa phong phú và hay. Người viết rất mong muốn nhận được các ý kiến đóng góp để đề tài được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp vui lòng liên hệ:

Nguyễn Cao Cường

Trường THCS Thái Thịnh - Quận Đống Đa – Thành Phố Hà Nội

Địa chỉ: 131 A - Phố Thái Thịnh – Quận Đống Đa – Thành Phố Hà Nội

Email: nguyencaocuong.hanoi@gmail.com

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hà Văn Chương - 838 bài toán bât đẳng thức – NXB ĐHQG TPHCM.
2. Nguyễn Đức Tấn – Chuyên đề bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số (THCS) – NXB Giáo dục
3. Trần Phương - Các phương pháp chứng minh BĐT - NXB TPHCM
4. Trần Phương – Những sai lầm thường gặp khi giải toán.
5. Nguyễn Vũ Thanh – Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS : Đại Số - NXB Giáo dục.
6. Phạm Quốc Phong – Nâng cao đại số - NXB Giáo dục.
7. Nguyễn Văn Mậu -Giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp không mẫu mực – NXB Giáo dục.